

DIFICULTADES DE LOS ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO EN LOS PROCESOS DE TRATAMIENTO Y CONVERSIÓN DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Francisco Arturo Vallejo*
Óscar Eugenio Tamayo**

RESUMEN

El objetivo de la investigación es identificar dificultades de los estudiantes de grado octavo en los procesos de tratamiento y conversión de los números racionales, con los sistemas semióticos textual, fraccionario y gráfico. El estudio se realizó con 27 estudiantes de tres instituciones educativas; una de las conclusiones a que se llegó, es la dificultad para representar el objeto de estudio de diferentes formas (fraccionario, gráfico y textual).

PALABRAS CLAVE: sistemas semióticos, conversión, tratamiento, representación semiótica.

DIFFICULTIES OF EIGHT GRADE STUDENTS IN TREATMENT AND CONVERSION OF RATIONAL NUMBER PROCESSES

151

ABSTRACT

The objective of the research is to identify the difficulties in eight grade students in the treatment and conversion of rational numbers, with the textual, fractional and graphic

* Magister en Educación Universidad de Caldas. Rector Instituto Latinoamericano Manizales. Estudiante Doctorado en Ciencias de la Educación Universidad de Caldas, RUDE Colombia. Correo electrónico: francisco.vallejo@gmail.com

** Doctor en Didáctica de las Ciencias y las Matemáticas. Universidad Autónoma de Barcelona. Profesor Universidad de Caldas - Universidad Autónoma de Manizales. Correo electrónico: oscar.tamayo@ucaldas.edu.co

Recibido 30 de mayo de 2008, aprobado 11 de agosto de 2008.

semiotic systems. The study was carried out with 27 students of three educational institutions. One of the main conclusions reached, deals with the students' difficulty to represent the object of study in different ways (fractional, graph and textual).

KEY WORDS: semiotic systems, conversion, treatment, semiotic representation.

1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se realizó dentro del enfoque de investigación cualitativo, buscando comprender las dificultades en los procesos de tratamiento y conversión de los números racionales, en estudiantes de grado octavo. Para ello se tuvo en cuenta los resultados de investigaciones recientes y los indicadores de evaluaciones externas a nivel nacional, como las *pruebas Saber*, que de alguna forma ayudaron a plantear ideas y soportar la pertinencia del problema a investigar.

Problema de investigación

¿Cuáles son las posibles causas de las dificultades que se presentan para la comprensión de los números racionales? Investigaciones recientes han puesto de manifiesto que:

- Los problemas de comprensión de los números racionales no se superan durante el período de la educación obligatoria (Sánchez y Llinares, citado en Gairín, 2001: 140).
- Para alcanzar la comprensión de un concepto es necesario el dominio coordinado de dos o más sistemas de representación (Kaput, citado en Gairín, 2001: 143).
- La mayor parte de la investigación en educación matemática se encuentra con un tema crucial que resulta de la paradoja cognitiva de las matemáticas: la incapacidad de la mayoría de estudiantes para cambiar el registro de representación (Duval, 2006: 166).

Los hallazgos encontrados en las investigaciones anteriormente mencionadas, reflejan un vacío al intentar pasar de un registro X a un registro Y, gráficamente sería:

$$X \longrightarrow ? \longrightarrow Y$$

Esto implica, "...problemas de conversión y tratamiento en las transformaciones semióticas" (Duval, 2006: 145).

Además, analizando el contexto colombiano, se pudo verificar que para el año 2005 el Ministerio de Educación aplicó las *pruebas Saber* a los jóvenes que cursaban los grados 5° y 9°, donde se evaluaron las competencias de los estudiantes en el nivel interpretativo, argumentativo, propositivo y el desempeño numérico variacional, geométrico y aleatorio. Los resultados en matemáticas de los estudiantes a nivel nacional, departamental y municipal se presentan en las Tablas 1 y 2:

Tabla 1. *Pruebas saber 2005*, matemáticas grado quinto. Fuente: www.mineducación.gov.co

Entidad	No. Alumnos Grado 5°	TIPO DE PENSAMIENTO					
		Numérico Variacional		Geométrico Métrico		Aleatorio	
		Prom	Desv	Prom	Desv	Prom	Desv
NACIONAL	609.674	4,03	1,06	3,80	1,19	3,82	1,13
CALDAS	15.622	4,22	1,09	3,99	1,24	4,03	1,10
MANIZALES	6.044	4,25	1,08	4,08	1,21	4,13	1,08

Tabla 2. *Pruebas saber 2005*, matemáticas grado noveno. Fuente: www.mineducación.gov.co

Entidad	No. Alumnos Grado 9°	TIPO DE PENSAMIENTO					
		Numérico Variacional		Geométrico Métrico		Aleatorio	
		Prom	Desv	Prom	Desv	Prom	Desv
NACIONAL	478.634	4,12	1,11	3,85	1,07	3,67	1,29
CALDAS	10.887	4,25	1,11	3,74	0,98	3,60	1,18
MANIZALES	4.950	4,25	1,09	3,69	0,95	3,58	1,17

Al estudiar en detalle el cuestionario y los ítems evaluados, se constató que el componente numérico estaba en su mayoría compuesto de números racionales. Aunque Manizales se ubicó por encima del promedio nacional y departamental, no indica que está en un lugar excelente, más bien, refleja las falencias que tienen los

estudiantes colombianos en el momento de demostrar competencias suficientes para abordar problemas de tipo numérico, específicamente con racionales.

Por lo expuesto hasta el momento, surgió la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuáles son las dificultades de los estudiantes de grado octavo en los procesos de tratamiento y conversión de los números racionales?

OBJETIVOS

Objetivo general

Identificar las dificultades de los estudiantes de grado octavo durante las transformaciones semióticas textual, fraccionaria y gráfica de los números racionales.

Objetivos específicos

Identificar las dificultades en el proceso de tratamiento de un registro semiótico.
Identificar las dificultades en el proceso de conversión entre registros semióticos.

MARCO TEÓRICO

La perspectiva en esta investigación, desde el marco teórico, se encaminó a valorar los trabajos hechos por otros investigadores y ser precavidos para encontrar respuestas a los interrogantes planteados, lo cual significa que la literatura fue útil para distintos propósitos como: detectar conceptos clave que no se habían pensado, tener en mente los errores que otros han cometido, conocer las diferentes maneras con que otros han abordado el problema y tomar ideas para la recolección y análisis de los datos; es por ello que la teoría consultada proveyó pensamientos que no se habían contemplado y que paulatinamente se ajustaron al contexto y desarrollo del estudio.

Tríada del signo peirceano

Para el desarrollo de un problema, un estudiante debe entrar en interacción con un objeto matemático, interpretarlo y representarlo por medio de signos, desde la perspectiva peirceana se distinguen tres componentes constitutivos en el estudio de los signos:

- El representante (el signo propiamente dicho).
- El representado (aquello de lo que el signo da cuenta).
- El interprete (el sujeto).

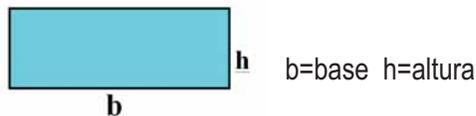
Veamos el Ejemplo 1, que trata a través de un problema matemático, explicar los tres componentes peirceanos:

Ejemplo 1. Un rectángulo tiene por base 12 m y altura 7 m. Hallar el área.

El **representado** es el rectángulo (que en este momento está dado en lenguaje común). El rectángulo se puede representar en un lenguaje pictográfico así:



Las dimensiones del rectángulo se representan con signos literales así:



El área se calcula de acuerdo con la fórmula $A=b.h =12 \text{ m} \times 7 \text{ m} =84 \text{ m}^2$

Las letras **b**, **h** y la figura geométrica  , son los **representantes** del rectángulo y sus dimensiones.

En este sentido, la noción de interpretante es la expresión dialéctica entre el conocimiento subjetivo del estudiante con el conocimiento objetivo institucionalizado en los acuerdos validados dentro de la disciplina matemática, para dar solución al problema planteado; es así como “el signo peirceano se presenta como triádico, es decir, que necesita la cooperación de tres instancias que son el signo S (el que representa), el objeto O (lo que representa) y el interpretante I que realiza la relación entre S y O” (Peirce, citado en Castañares, 2000). Ver Figura 1.

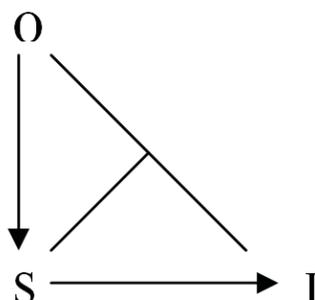


Figura 1. Característica del signo Peirceano.
“El objeto O está determinado por el signo S, el signo S está determinado por el interpretante I y la relación triádica \wedge vinculan a S, O, I” (Peirce, citado en Castañares, 2000).

En el Ejemplo 1, se puede observar la correspondencia con la Figura 1, donde O es el objeto de estudio (rectángulo), S el signo de representación del objeto (que para el caso puede ser pictográfico o literal), I es el interpretante quien pone su conocimiento en vinculación con S y O para formar la triada; es así como un estudiante debe hacer una inferencia al pasar del signo para representar en su mente al objeto y al hablar de inferencia se refiere al acto de pensamiento donde un proceso mental acepta que un nuevo símbolo representa un objeto; desde esta perspectiva, Peirce defiende que “los elementos de la semiósis son necesariamente tres: signo, objeto e interpretante” y que “sólo una relación triádica puede dar razón de un fenómeno genuinamente significativo” (Peirce, citado en Castañares, 2000).

Objetos matemáticos

156

En matemática los conceptos no se refieren a objetos reales como sí es el caso de otras ciencias como la física y la química, por ejemplo: al referirnos al concepto de número natural nos remitimos a objetos no reales, puesto que los números no existen en concreto, es decir, no los encontramos debajo de un árbol o como fruto de la naturaleza; entonces, ¿cómo conceptualizar lo que físicamente no es real? Para ello es necesario la utilización de signos, ya que no se dispone de objetos, entendiendo que “el **objeto matemático** del saber es un emergente de un sistema de praxis donde se manipulan objetos materiales que se descomponen en diferentes registros semióticos: registro oral, de las palabras o de las expresiones pronunciadas;

registro gestual; dominio de las inscripciones, es decir, lo que se escribe o se dibuja” (Chevallard, citado en D’Amore, 2005: 1). Desde esta mirada, “el concepto no es más que un nombre acompañado de una imagen individual negando la existencia objetiva de los universales, es decir, adquiere un carácter prioritario la pareja objeto – signo como mediaciones de representación mental para la adquisición de un conocimiento” (Duval, 1999: 128), por lo tanto, “la aprehensión de los **objetos matemáticos** es un aprendizaje conceptual y sólo por representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos” (D’Amore, 2005: 3), esta es la paradoja cognitiva del pensamiento matemático, con lo cual surgen preguntas como: ¿Se deben enseñar primero los conceptos?, ¿se deben enseñar primero las representaciones? Si la primera pregunta depende de la segunda y la segunda de la primera, entonces ¿por dónde comenzar? Esta paradoja se puede convertir en un círculo vicioso durante el proceso enseñanza-aprendizaje y se ve reflejado en la forma tradicional de la instrucción matemática, donde el profesor empieza por hacer un dictado de los conceptos teóricos de un objeto matemático para luego pasar a las ejemplificaciones, situación que lleva a que los estudiantes no le vean sentido y se sientan confundidos al escuchar y escribir un discurso que sensorialmente no los ubica en ningún tipo de representación.

Sistemas semióticos

Los objetos matemáticos no son accesibles físicamente, sino, a través de signos y representaciones semióticas, por lo tanto, “en matemática no existe un solo sistema semiótico sino varios sistemas para el estudio de un contenido” (Duval, 1999: 40). Observemos el Ejemplo 2, que trata de explicar las diferentes formas que pueden existir para dar solución a un problema matemático, a través de sistemas semióticos:

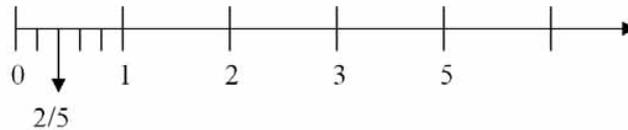
Ejemplo 2. Carlos vende los dos quintos de la finca, si el área de la finca es de 480 Dm^2 , ¿cuántos Dm^2 vendió?

- Primer sistema semiótico: lenguaje común
Carlos vende los dos quintos de la finca...
- Segundo sistema semiótico: lenguaje aritmético $\frac{2}{5}$
- Tercer sistema semiótico: lenguaje algebraico
 $5x-2=0$, donde X representa la cantidad vendida

- Cuarto sistema semiótico: esquema pictográfico



- Quinto sistema semiótico: lenguaje figural



El Ejemplo 2 muestra el objeto matemático representado de cinco formas diferentes, esto no significa cambiar el contenido del objeto matemático, sino la forma de representarlo en otro sistema semiótico. De esta manera, los sistemas semióticos establecen los diferentes registros de representación, que a su vez, determinan distintas formas de comprensión de un objeto matemático.

Representaciones semióticas

“La actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación” (Duval, 2006: 144). Para comprender este concepto observemos el Ejemplo 3:

Ejemplo 3. Mario se comió la mitad de la naranja.

El problema está dado en un lenguaje común; ese lenguaje se puede constituir en varios registros de representación, así:

- Primer registro de representación: Mario se comió la mitad...
- Segundo registro de representación: Mario se comió un medio

Obsérvese que el mismo problema fue expresado en dos representaciones que enuncian el mismo contenido de estudio (media naranja), en este sentido “la capacidad de representar un mismo objeto en varias representaciones aumenta el grado de significación y comprensión en matemáticas” (Duval, 2006: 145). El contenido de cada registro de representación no sólo depende de los objetos

representados, sino también, de los sistemas semióticos empleados, ya que algunos sistemas semióticos permiten mayor número de registros de representación que otros, para explicar esta situación, retomemos el Ejemplo 3: “Mario se comió la mitad de la naranja”, si el problema lo transcribimos al lenguaje aritmético puede resultar un registro más que el anterior, así:

- Primer registro: 0,5 (decimal)
- Segundo registro: $1/2$ (fraccionario)
- Tercer registro: $5 \cdot 10^{-1}$ (exponencial)

De esta manera, “formar una representación semiótica es recurrir a un(os) signo(s) para actualizar o sustituir la visión de un objeto” (Duval, 1999: 41).

Transformación de las representaciones semióticas

“Formación, tratamiento y conversión son las actividades cognitivas fundamentales de la semiósis” (Duval, 1999: 41); la formación es la capacidad de un sujeto para evocar un objeto real o para expresar un pensamiento, para ello es necesario la elección de símbolos, imágenes, gráficas, etc., que sustituyan el objeto de estudio, pero, sin confundirlo: por ejemplo, el símbolo π es una representación del número irracional 3,141592654 que facilita por economía de tiempo y escritura utilizarlo en una operación matemática. “Se habla de tratamiento cuando la transformación produce otra representación en el mismo registro” (Duval, 1999: 40), esto es posible a través de la aplicación de las diferentes operaciones matemáticas. “Se habla de conversión cuando la transformación produce un registro distinto al de la representación inicial” (*Ibíd.*: 40), para ello es necesaria la identificación de unidades significantes del registro de partida y del registro de llegada que permitan una coordinación semántica.

El Ejemplo 4 explica por medio de problema matemático, la conversión y el tratamiento.

Ejemplo 4. Jairo compró un cd que le costó tres quintos de su dinero. Si aún le quedan \$200, ¿cuánto tenía al principio?

El problema del Ejercicio 4 está dado en lenguaje común; procederemos a realizar las dos clases de transformaciones:

Conversión: para realizar la conversión es necesario identificar las unidades significantes: dinero que tenía, tres quintos, lo que le queda, numerador, denominador igualdad, variable x . Luego poner en correspondencia semántica las unidades significantes, así:

- Variable x con el dinero que tenía
- Tres quintos: tres con numerador y cinco con denominador, es decir $3/5$
- Le quedan con la igualdad a 200

A partir de la correspondencia semántica se hace la composición de la ecuación:

$$x = \frac{3}{5}x + 200$$

Tratamiento:

$$x = \frac{3}{5}x + 200$$

$$5x = 3x + 1000$$

$$5x - 3x = 1000$$

$$2x = 1000$$

$$x = 500$$

El tratamiento se realizó dentro del mismo registro semiótico y corresponde a una secuencia de pasos, que produce en cada uno de ellos, una transformación algorítmica.

160

La conversión se realizó pasando del registro semiótico del lenguaje común al registro semiótico del lenguaje algebraico, pero sin cambiar los contenidos del problema. En este sentido, “existe congruencia representacional cuando se presentan tres condiciones: coordinación semántica de las unidades significantes, univocidad y orden de aprehensión” (Clark y Chase, citado en Duval, 1999: 46); en el problema del Ejercicio 4 se puede observar que las unidades significantes se relacionaron uno a uno, es decir, que dichos registros tienen univocidad semántica y el orden de aprehensión es semejante tanto del lenguaje común como del algebraico.

2. METODOLOGÍA

Partiendo de que “la investigación cualitativa es interpretativa, ya que el investigador hace su propia descripción y valoración de los datos” (Hernández, Collado y Baptista, 2001: 524), en esta investigación se describen e interpretan los procesos de tratamiento y conversión, que realizaron estudiantes de grado octavo de diferentes instituciones educativas que participaron en la investigación. El análisis de los datos se realizó en tres momentos: primero, se hizo una descripción general de la información arrojada por todos los sujetos investigados, en la cual se incorporan algunos datos estadísticos, los cuales aportaron a la comprensión del problema de investigación planteado. En el segundo momento se realizó un análisis detallado por estudiante, y en el tercer momento se hizo un estudio en profundidad con tres grupos de alumnos.

La Figura 2, permite observar el proceso de recolección y análisis de los datos.

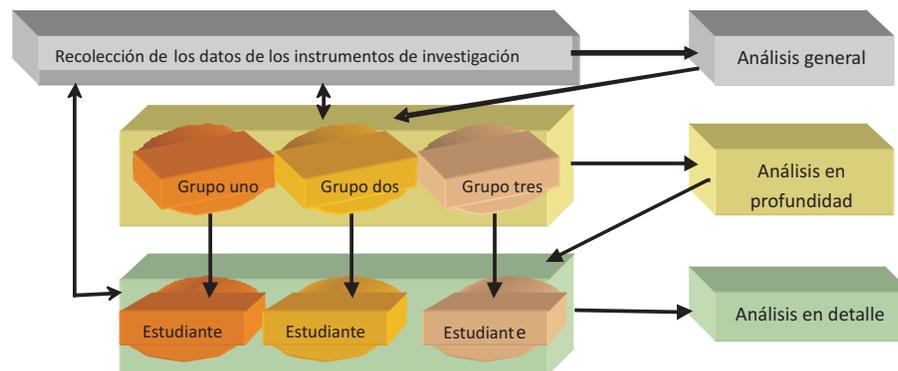


Figura 2. Proceso de recolección y análisis de los datos.

El inventario de los datos inició con la recolección de la aplicación del instrumento de investigación a los 27 estudiantes, luego se recogió información más puntual en las entrevistas realizadas individualmente. Los resultados se construyeron a partir de la información general, pasando por el análisis detallado y culminando con el análisis en profundidad

La Tabla 3 muestra la forma como se seleccionaron los estudiantes para la investigación.

Tabla 3. Forma de selección de los estudiantes que participaron en la investigación

Selección de los estudiantes que participaron en la investigación							
Análisis general (total: 27 estudiantes)						Análisis en profundidad	Análisis en detalle
Desempeño académico	Colegio 1 (alumnos: 9)		Colegio 2 (alumnos: 9)		Colegio 3 (alumnos: 9)	De cualquier colegio (9 estudiantes)	De cualquier colegio (3 Estudiantes)
Alto	3	9	3	9	3	3	1
Medio	3		3		3		1
Bajo	3		3		3		1

3. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

En la primera parte se presenta un informe de los 27 participantes en la investigación, en la segunda, se muestra un análisis detallado de los resultados de tres estudiantes; y por último, se presenta un análisis en profundidad de tres grupos de estudio.

3.1. RESULTADOS GENERALES

El informe de los datos recolectados a los 27 estudiantes que participaron en la investigación, se muestran por categorías en la Tabla 4.

Tabla 4. Resultados generales por categorías y subcategorías.

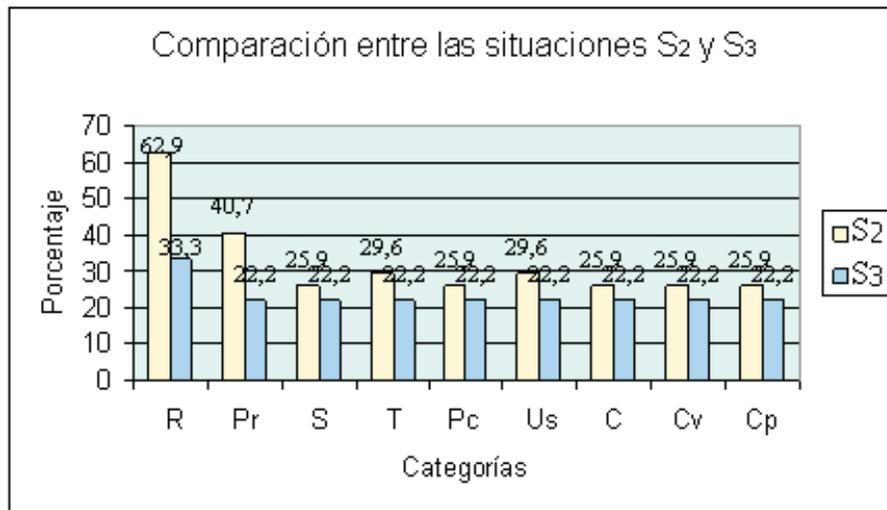
Situación	% R	% Pr	% S	% T	% Pc	% Us	% C	% Cv	% Cp
S ₁	51,8	22,2	22,2	22,2	22,2	14,8	14,8	14,8	14,8
S ₂	62,9	40,7	25,9	29,6	25,9	29,6	25,9	25,9	25,9
S ₃	33,3	22,2	22,2	22,2	22,2	22,2	22,2	22,2	22,2
S ₄	40,7	29,6	11,1	22,2	22,2	18,5	11,1	11,1	11,1
Promedio	47,7	28,6	20,3	24	23,1	21,2	18,5	18,5	18,5

R: representación semiótica, Pr: proceso, S: secuencia, T: tratamiento, Pc: producción, Us: unidades significantes, C: coordinación semántica, Cv: conversión semiótica, Cp: comprensión.

S₁: Orden de las fracciones, S₂: Ubicación de racionales en la recta, S₃: Identificación de fracciones en la recta, S₄: Recorrido en la recta numérica.

En S₁ –orden de fracciones– el 51,8% de los estudiantes evidencia representaciones, el 22,2% realiza procesos y secuencias, es decir, sólo el 42,8% de los estudiantes que hace representaciones alcanza a realizar tratamiento y producción al interior del registro semiótico p/q, de los estudiantes que hacen tratamiento el 66,6% alcanza a realizar conversión del registro semiótico p/q al registro semiótico gráfico a través de la recta numérica; esto quiere decir, que tienen la capacidad de identificar unidades significantes y realizar la respectiva correspondencia semántica.

Al comparar S₂ con S₃, se observa que para los estudiantes es más fácil ubicar fraccionarios en la recta numérica que identificar el valor numérico de una fracción en la recta (ver Gráfica 1).

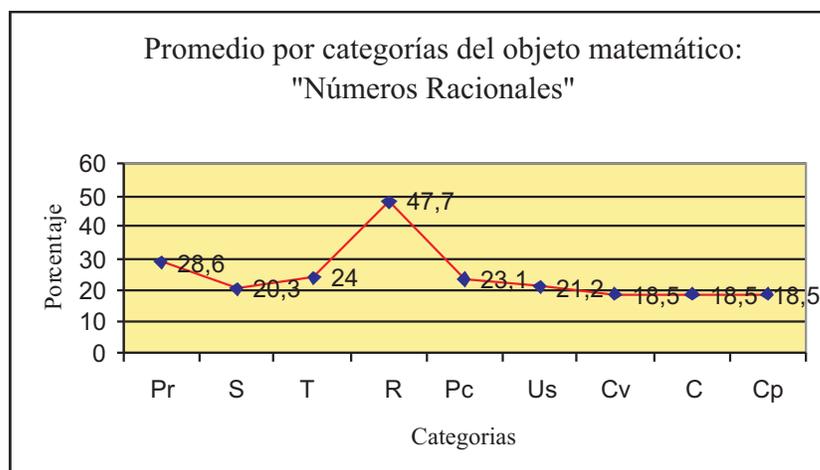


Gráfica 1. Esta gráfica muestra la comparación entre la situación “Ubicación de fracciones en la recta numérica” y la situación “Identificación de fracciones en la recta numérica”, observándose que la S₂ presenta mayor porcentaje de éxito que la S₃, en cada una de las categorías analizadas.

La situación S_4 –recorrido en la recta numérica– examina la habilidad de los estudiantes para pasar de un registro textual a un registro fraccionario y luego ubicar las fracciones en la recta numérica; tratando con ello de visualizar si “para la comprensión de un concepto es necesario el dominio coordinado de dos o más sistemas de representación” (Kaput y Romero, citado en Gairín, 2001: 143.). Los datos arrojados en S_4 fueron: representación 40,7%, tratamiento 22,2% y conversión 11,1%; estos resultados, reflejan que:

- Cuando hay que hacer tratamiento (suma o división), antes de pasar del registro p/q al registro gráfico en la recta numérica, la posibilidad de fracaso aumenta en un 42,85% (11,1/25,9) (ver Tabla 4).
- Cuando hay que pasar del registro textual al p/q y de éste al gráfico en la recta numérica –transitividad entre tres registros–, la posibilidad de conversión es baja, ya que de 27 estudiantes sólo dos llegaron a resolver este tipo de problema.

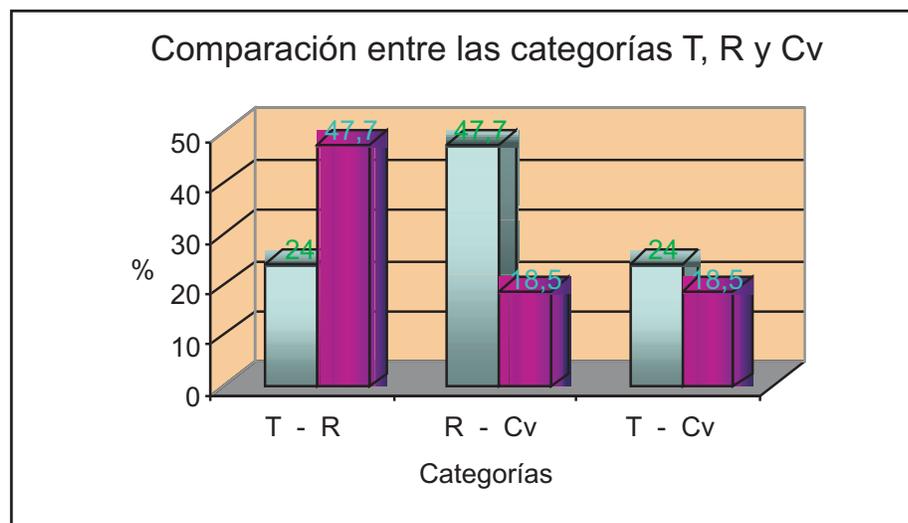
Al observar la Gráfica 2, es factible inferir que “la conversión puede ser considerada como el umbral de la comprensión matemática y parece ser que es un proceso cognitivo más complejo que el tratamiento” (Duval, 2006: 149).



Gráfica 2. Promedio por categorías. El promedio de la categoría R (47,7), indica que menos de la mitad de los estudiantes tienen la capacidad de representar el objeto matemático (número racional); el promedio de los estudiantes que realizan tratamiento es del 24% y el promedio de la conversión es del 18,5%.

Si la tesis de Duval se mira desde la comparación de los resultados parciales de cada categoría (el 24% hace tratamiento y el 18,5% conversión), con respecto al 100% de la población objeto de estudio, entonces dicha afirmación es cierta; pero si la situación se analiza entre los resultados de las categorías, se puede inferir que:

- Para realizar tratamiento y conversión es necesario primero la evocación del objeto de estudio a través de una representación –llámese signo, gráfica, etc.–, entonces, bajo esta premisa, se debe hacer la relación entre la Representación, el Tratamiento y la Conversión como lo muestra la Gráfica 3:



Gráfica 3. Comparación entre las categorías T, R y Cv. La comparación entre representación y tratamiento da un índice del: $47,7-24=24,7\%$. La comparación entre representación y conversión da un índice del: $47,7-18,5=29,2\%$. La comparación entre tratamiento y conversión da un índice del: $24-18,5=5,5\%$.

Esto indica que, después de estar superada la categoría representación, los fracasos entre tratamiento y conversión o entre conversión y tratamiento son bajos.

3.2. ANÁLISIS DETALLADO POR ESTUDIANTE

Análisis del estudiante Simón

Análisis de Tratamiento: “Un tratamiento es una transformación que se efectúa al interior de un mismo registro” (Duval, 1999: 31), esto se evidencia en varias transformaciones que realiza Simón a lo largo del trabajo, algunas de ellas son:

Ante la pregunta: ¿Cuál es el proceso para determinar si el número $5/6$ es menor, mayor o igual al número que le corresponde al punto a, de la Figura 1?

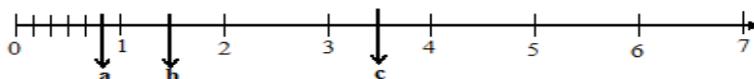


Figura 1: Representación de los números racionales positivos en la recta numérica

Respuesta de Simón: “Primero determino que la unidad está dividida en seis partes iguales y que las partes que necesito son cinco. Luego me ubico en la recta, busco la primera unidad y veo que está dividida en 6 y busco las primeras 5 partes. Luego veo o busco el punto A y encuentro que es igual a los $5/6$ que me piden”.

Análisis	
Elementos detectados	Significado
determinar	actuar metódico
dividir	operación matemática
necesitar	procedimiento de reparto
primero y luego	secuencia
la unidad está dividida en seis partes iguales y que las partes que necesito son cinco	procedimiento secuencial

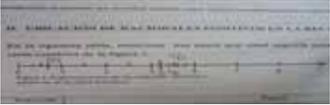
Análisis de Conversión: “La conversión es una transformación que hace pasar de un registro a otro” (Duval, 1999: 31), esta afirmación es evidenciada por Simón mediante la siguiente explicación:

Mencione tres pasos que usted haría para ubicar la fracción $7/2$ en la recta numérica.

Respuesta de Simón: “Miro que en la fracción se me indica que la unidad está dividida en 2 y necesitamos 7 partecitas, entonces pienso, y para las 7 partecitas necesito 4 unidades divididas, en el gráfico divido las 4 unidades en 2. Cuento las 7 partecitas necesitadas de las unidades divididas”.

Para determinar la conversión es necesario distinguir que “existe congruencia representacional cuando se presentan tres condiciones: coordinación semántica de las unidades significantes, univocidad y orden de aprehensión” (Clark y Chase, citado en Duval, 1999: 46), en este sentido, las unidades significantes y la coordinación semántica que se detectan en la respuesta de Simón son:

Análisis de la respuesta

	Registro de partida (p/q)	Correspondencia semántica	Registro de llegada (recta)
Unidades significantes	<p>a. la unidad está dividida en 2.</p> <p>b. necesito 4 unidades.</p> <p>c. cuento las 7 partecitas necesitadas de las unidades divididas.</p>	<p>-El punto a tiene correspondencia con cada unidad dividida en 2.</p> <p>-El punto b corresponde con las 4 unidades tomadas en la gráfica.</p> <p>-En c hay correspondencia con las 7 partes tomadas del cero al 7/2.</p>	

Triangulación: se toman las preguntas que al cruzarse deben evidenciar convergencias de sus resultados, ellas se presentan en la Tabla 5.

Tabla 5. Triangulación de preguntas.

	P ₁	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇
Respuestas halladas	<p>Primero determino que la unidad está dividida en seis partes iguales y que las partes que necesito son cinco. Luego me ubico en la recta, busco la primera unidad y veo que está dividida en 6 y busco las primeras 5 partes.</p> <p>Luego veo o busco el punto A y encuentro que es igual a los 5/6 que me piden.</p>	<p>Miro que en la fracción se me indica que la unidad está dividida en 3 y necesitamos 2 partes. En el gráfico divido la unidad en 3. En el gráfico en la unidad dividida ubico 2 partes que son las necesitadas.</p>	<p>Veo que en la Y se encuentran 2 unidades y 1/2 después del 0. Veo que cada unidad del 0 al 3 está dividida en 2 y que sólo necesito 5 partes. Para hacer la fracción digo en cuanto divido cada unidad como denominador, y como numerador pongolaspartecitas necesitadas o usadas.</p>		
Elementos encontrados	<p>N u m e r a d o r , denominador-partes tomadas de la unidad, partes en que se divide la unidad.</p>	<p>Fracción-punto.</p>	<p>Punto-fracción.</p>	<p>Múltiples fracciones-múltiples puntos.</p>	<p>Múltiples fracciones-múltiples puntos.</p>

P₁: Escriba el proceso para determinar si el número $5/6$ es menor, mayor o igual al número que le corresponde al punto a, de la figura 1.

P₄: Mencione tres pasos que usted haría para ubicar cada fracción ($2/3$, $7/2$, $3^{1/5}$) en la recta numérica.

P₅: Escriba en la siguiente tabla tres pasos que usted haría para calcular el valor numérico del punto M y el valor numérico del punto Y.

P₆: La cancha de microfútbol de su colegio tiene 10 metros de largo. El profesor de educación física ha calculado que en cada salto usted recorre una distancia de $3/2$ de metro y le pide que realice 6 saltos a partir del punto cero de la raya roja. ¿Señale sobre la cancha, cada salto realizado, hasta encontrar el valor del punto al cabo del salto 6?

P₇: Un escalador comienza a subir una pared desde 0 metros, en cada trepada sube $4/3$ de metro y baja la mitad de lo que sube, en total realiza 9 trepadas; ¿señalar sobre la pared paso a paso las trepadas del escalador?

En la Tabla 5 es posible observar que P₄ y P₅ enfatizan el concepto de P₁, es decir, están inmersos los elementos encontrados en P₁. P₆ y P₇, enfatizan los elementos de P₄ y P₃, al ser capaz de ubicar múltiples fracciones en múltiples puntos.

En este sentido, la convergencia de las diferentes situaciones, acciones (procedimientos), argumentos y conceptos llevan a la configuración del objeto de estudio (número racional), definida la configuración como “las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos” (Godino *et al.*, 2005: 5).

Análisis del estudiante Santiago

Análisis de tratamiento: ante la pregunta: Para determinar cuál de las siguientes fracciones $7/5$ ó $4/3$ se ubica a la derecha de la otra, ¿es necesario realizar los siguientes pasos?

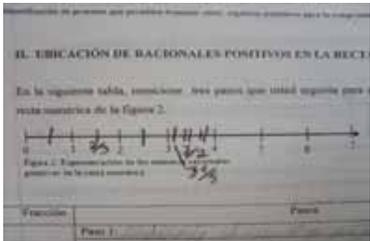
Respuesta de Santiago: “Si quiere se puede dividir $7/5$ nos da 1 y sobran 2 o se divide de 0 a 1 en cinco partes y como en el primero no alcanza, se cogen 2 del segundo. Si quiere también divide $4/3$ que nos da 1 y sobra 1 o se divide de 0 a 1 en tres partes y el primero no alcanza y recoge 1 del 1 al 2. Entonces $7/5$ está después por que da $1^{2/5}$ y $4/3$ da $1^{1/2}$ ”.

Análisis	
Elementos detectados	Significado
Si quiere..., entonces...	secuencia
verbo dividir	acción procedimental
nos da 1 y sobran 2	tratamiento
también divide 4/3	acción procedimental
nos da 1 y sobra 1	tratamiento
divide de 0 a 1 en tres partes y el primero no alcanza y recoge 1 del 1 al 2	tratamiento
7/5 está después por que da $1^{2/5}$ y $4/3$ da $1^{1/2}$.	tratamiento al interior del registro p/q

Los elementos detectados evidencian la existencia de tratamiento en el mismo registro p/q.

Análisis de Conversión: **en la pregunta:** “Mencione tres pasos que usted seguiría para ubicar la fracción $2/3$ en la recta numérica” la respuesta de Santiago fue: “Se divide el número en 2 partes. Como no se puede en el primero se utiliza uno del segundo, y así quedan dos tercios”

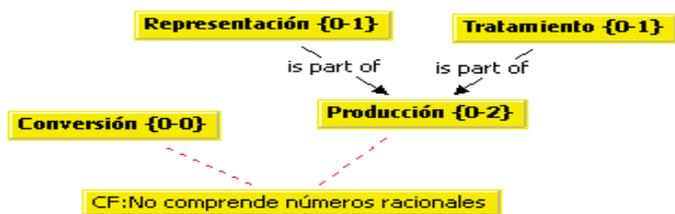
Análisis de la respuesta

	Registro de partida (p/q)	Correspondencia semántica	Registro de llegada (recta)
Unidades significantes	a. Se divide el número en 2 partes. b. Como no se puede en el primero se utiliza uno del segundo.	Al decir en el punto a que divide el número en 2 partes, está evidenciando una confusión del numerador con del denominador; esto se ve reafirmado con lo que expresa en el punto b y la correspondencia con el registro de llegada; lo cual está muy lejos de la ubicación real de $2/3$.	

Como no se detectaron elementos en P_1 y P_7 , no es posible confrontarlos con las preguntas P_4 , P_5 y P_6 . P_5 converge con P_6 en la identificación de fracciones, pero hay divergencia con P_4 en la ubicación de fracciones propias, esto indica que se encuentran dificultades en la ubicación de fracciones propias, pero no las impropias. Por lo tanto, la no convergencia de las diferentes situaciones, acciones (procedimientos), argumentos y conceptos llevan a la confusión del objeto de estudio (número racional).

Análisis de la estudiante Valentina

La Gráfica 4. muestra los hallazgos del trabajo realizado por Valentina, presentando un informe general del objeto matemático: números racionales.



Gráfica 4. No comprensión de números racionales.

No es posible detectar las categorías formación de representaciones, producción, secuencia, unidades significantes o coordinación semántica.

Como se observa en la Gráfica 4, no es posible determinar categorías ya que en cada una de las respuestas no se halla evidencia alguna, por ejemplo:

Ante la pregunta: “Mencione tres pasos que usted seguiría para ubicar cada fracción $-2/3$, $7/2$ y $3\frac{1}{5}$ en la recta numérica”. La respuesta de Valentina fue:

Para $2/3$: “Tratar de ubicar una unidad en la que se pueda dividir la fracción. Dividirla”.

Para $7/2$: “Ubicarlo en la recta. Dividir la unidad”.

Para $3\frac{1}{5}$: “Ubicarlo en la recta. Dividir la unidad. Seleccionar lo necesario”.

En ninguna de las tres situaciones es posible hallar un procedimiento, ya que no se evidencia el cómo, que es una característica del hacer. No evoca el objeto de estudio en forma p/q , o en forma textual. No es posible detectar unidades significantes como numerador, denominador, partes en que se divide la unidad, partes que se toman de la unidad, entre otras. Las respuestas corresponden más a palabras sueltas y desarticuladas sin relación con el objeto de estudio y el contexto del problema. La Figura 2 reafirma los argumentos anteriores, ya que en ella se ve, que los puntos de la recta numérica no corresponden a las fracciones $2/3$, $7/2$ y $3\frac{1}{5}$.

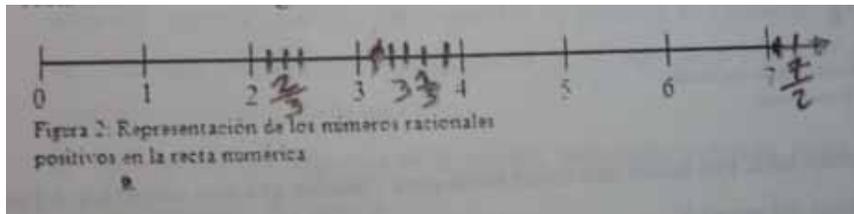


Figura 2. Ubicación de racionales en la recta, Valentina. La ubicación del fraccionario $2/3$ da a entender qué se hizo con respecto al valor del numerador, éste mismo fenómeno se observa con la ubicación del fraccionario $7/2$.

Ante la pregunta: “Escriba tres pasos que usted haría para calcular el valor numérico del punto M y el valor numérico del punto Y de la Figura 3”.

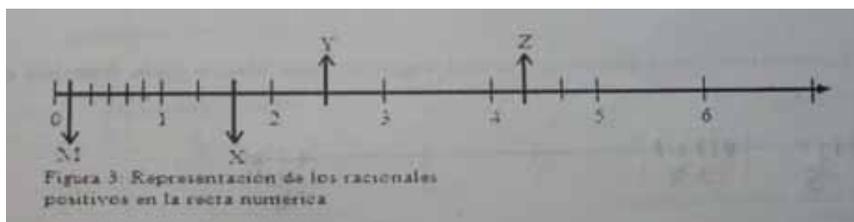


Figura 3. Identificación del valor numérico de un punto. El ejercicio consiste en escribir los pasos que se deben seguir para calcular el valor numérico del punto M y el valor numérico del punto Y.

La respuesta de Valentina fue:

Para M: "Ubicar el punto M en la recta. Mirar cuánto ocupa. Calcular su valor de acuerdo a su medida".

Para Y: "El punto Y en la recta. Mirar cuánto es su valor de acuerdo a su cantidad y ocupación".

Los contenidos de las respuestas, no permiten ser analizados, ya que los resultados corresponden más a palabras sueltas y desarticuladas que a la identificación del objeto de estudio, en este sentido, "no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación" (Duval, 1999: 9), y mucho menos si se presentan dificultades para evocar al menos un tipo de representación.

1.2. ESTUDIO EN PROFUNDIDAD POR GRUPO

Grupo uno: estudiantes que demostraron buen desempeño en procesos de tratamiento y conversión (Simón $-E_{1-}$, Stiven $-E_{2-}$, Santi $-E_{3-}$).

Grupo dos: estudiantes con desempeño aceptable en procesos de tratamiento y conversión (Santiago $-E_{1-}$, Dani $-E_{2-}$, Juan $-E_{3-}$).

Grupo tres: estudiantes con bajo desempeño en procesos de tratamiento y conversión (Valentina $-E_{1-}$, Andrea $-E_{2-}$, Daniel $-E_{3-}$).

Como se evidencia en la caracterización anterior, en cada uno de estos tres subgrupos se incluyeron los estudiantes antes analizados en detalle (Simón, Santiago y Valentina). En las Tablas 7 al 12 se presentan a manera de síntesis los análisis correspondientes de los nueve estudiantes que hacen parte de estos tres subgrupos, no sin antes aclarar que en todos los casos los análisis realizados siguen la misma estructura y lógica correspondiente al análisis en detalle de Simón, Santiago y Valentina.

Grupo uno

Tabla 7. Análisis de tratamiento grupo uno.

Proceso a analizar:		Tratamiento	Situación (S _i):	Orden de las fracciones (I) y Recorrido en la recta numérica (IV)	Convergencia /divergencia
P _i	E _i	Datos arrojados	Elementos detectados	Significado	
	E ₁	Primero determino que la unidad está dividida en seis partes iguales y que las partes que necesito son cinco. Luego me ubico en la recta, busco la primera unidad y veo que está dividida en 6 y busco las primeras 5 partes. Luego veo o busco el punto A y encuentro que es igual a los 5/6 que me piden.	Determinar Dividir Necesitar Primero, luego La unidad está dividida en seis partes iguales y las partes que necesito son cinco.	Actuar metódico, que permite relacionarlo con el valor del punto en la recta. Operación matemática. Procedimiento de reparto. Secuencia.	En E ₁ , E ₂ y E ₃ , se detectan elementos convergentes en: -Operación matemática: verbo dividir -Procedimiento de reparto: necesitar, contar. -Secuencia: primero, luego, tener en cuenta, comparar, volvemos a contar, por último.
P ₁	E ₂	Tener en cuenta las partes en que se dividió del 0 al 1. Calcular el valor numérico del punto a. Comparamos si es igual al número indicado (5/6), y en este caso 5/6 es igual al punto a.	Dividir Calcular Tener en cuenta, comparar	Operación matemática. Procedimiento de reparto. Secuencia.	
	E ₃	Contamos el # de rayitas en que se divide cero hasta llegar a uno y el número de rayitas contadas será el denominador, en este caso de cero hasta uno hay 6 rayitas. Volvemos a contar las rayitas en que se dividió la unidad y donde se encuentra señalado el punto hasta donde llega será el numerador, en este caso es 5. Por último la fracción que nos mostraron al principio fue 5/6 y la fracción dibujada en a es igual, es decir, 5/6.	Dividir Contar Volvemos a contar, por último	Operación matemática. Procedimiento de reparto. Secuencia.	

P_i: corresponde a la pregunta i descritas en la Tabla 5. E_i: Nombre del estudiante i perteneciente al grupo G_i

Dificultades de los estudiantes de grado octavo en los procesos de tratamiento

Tabla 8. Análisis de conversión grupo uno.

Proceso a analizar:		Conversión	Situación (S _i):	Ubicación de racionales en la recta (II) y Recorrido en la recta numérica (IV)		
Unidades significativas						
P _i	E _i	Datos arrojados	Registro de partida (p/q)	Correspondencia semántica	Registro de llegada (recta)	Convergencia /divergencia
	E ₁	Miro que en la fracción se me indica que la unidad está dividida en 2 y necesitamos 7 partes, entonces pienso y para las 7 partes necesito 4 unidades divididas, en el gráfico divido las 4 unidades en 2. Cuento las 7 partes necesitadas de las unidades divididas.	a. la unidad está dividida en 2. b. necesito 4 unidades. c. cuento las 7 partes necesitadas de las unidades divididas.	-El punto a tiene correspondencia con cada unidad dividida en 2. -El punto b corresponde con las 4 unidades tomadas en la gráfica. -En c hay correspondencia con las 7 partes tomadas del cero al 7/2.		En E ₁ , E ₂ y E ₃ , se detectan elementos convergentes en: -Partes en que se divide la unidad: la unidad está dividida en 2, dividir la recta en cuantas veces indica el denominador, división de la recta de 3 a 4 porque es 3.5. -En los tres casos se ubica correctamente la fracción 7/2 en el punto que corresponde a la recta numérica.
P ₄	E ₂	Observo el fraccionario y si se puede convertirlo en su mínima expresión. Después dividir la recta cuantas veces indique el denominador y así yo puedo ubicar, teniendo en cuenta el mixto.	a. Dividir la recta en cuantas veces indica el denominador. b. Ubicar, teniendo en cuenta el mixto.	-a tiene correspondencia con el punto medio de 3 y 4. b tiene correspondencia con el mixto 3 ^{ro} del registro de llegada, donde se evidencia que antes hubo un tratamiento.		
	E ₃	Realizaría la división que me piden para saber cómo tengo que cortar la recta y qué parte dividir. 7÷2=3.5. Realizaría la división de la recta en este caso de 3 a 4 porque es 3.5. Ubico la fracción en el número que me dé.	a. 7÷2=3.5. b. división de la recta de 3 a 4 porque es 3.5.	a corresponde a la conversión de un tercer registro b en correspondencia con la fracción 7/2 ubicado en la recta del registro de llegada.		

Grupo dos

Tabla 9. Análisis de tratamiento grupo dos.

Proceso a analizar:	Tratamiento	Situación (S1):	Orden de las fracciones (I) y Recorrido en la recta numérica (IV)	Convergencia /divergencia
P_1	E_1	Datos arrojados	Elementos detectados	Significado
E_1	No se encuentran datos, lo que imposibilita hacer algún tipo de rastreo.			En E_2 y E_3 , se detecta convergencia en la operación matemática dividir.
E_2	Sólo dividir 5 entre 6 queda 0,8. Me doy cuenta de que el punto a es igual a 5/6.	Dividir. Dividir 5 entre 6 queda 0,8.	Operación matemática. Conversión.	En E_2 y E_3 , hay divergencia en el actuar metódico, en la secuencia y operación matemática, lo que indica que existen problemas de tratamiento.
E_3	Primero necesito determinar qué valor tiene el punto a. Después de realizar el primer paso, miro si al dividir 5/6 y al dividir 7/6 (punto a) era mayor, menor o igual. Miramos que después de la división, 5/6 es menor que el punto a.	Primer paso, después. Determinar.	Secuencia. Actuar metódico.	
		Dividir.	Operación matemática.	

Tabla 10. Análisis de conversión grupo dos.

Proceso a analizar:		Conversión	Situación (S _i):	Ubicación de racionales en la recta (II) y Recorrido en la recta numérica (IV)		
Unidades significantes						
P _i	E _i	Datos arrojados	Registro de partida (p/q)	Corresp. Semántica	Registro de llegada (recta)	Convergencia /divergencia
E ₁		Divido 7 entre 2 y da 3 y sobra 1. La tercera unidad se divide en 2 y así se halla 7/2.	a. Divido 7 entre 2 y da 3 y sobra 1. b. La tercera unidad se divide en 2.	-Del punto a se observa que 3 y el 1 que sobra corresponden a la ubicación de 7/2 en la recta. -Se observa una correspondencia de b con la división que se hace de 3 a 4.		-En E ₁ , E ₂ y E ₃ se observa convergencia en la ubicación de 7/2 en la recta numérica, es decir, hay conversión. -E ₁ tiene divergencia con E ₂ y E ₃ en la ubicación de 2/3, esto puede indicar que E ₁ presenta dificultades en la ubicación de fracciones propias, es decir, no hay coordinación entre registros semióticos.
P ₄	E ₂	Encontrar el decimal o entero que representa cada fracción dividiendo. 7÷2=3,5.	a. Encontrar el decimal o entero. b. 7÷2=3,5.	-En a no se observa correspondencia con la gráfica. -En b se observa correspondencia con la ubicación de 7/2 en la recta.		
E ₃		Como vemos el numerador es mayor que el denominador, así que lo podemos volver entero o decimal. Después miramos el resultado, en este caso es 3,5.	a. el numerador es mayor que el denominador, así que lo podemos volver entero o decimal. b. el resultado, en este caso es 3,5.	-En a no se observa correspondencia con la gráfica. -En b h a y correspondencia de 3,5 con la ubicación de 7/2 en la recta.		

Grupo tres

Tabla 11. Análisis de tratamiento grupo tres.

Proceso a analizar:	Tratamiento	Situación (S1):	Orden de las fracciones (I) y Recorrido en la recta numérica (IV)	Significado	Convergencia /divergencia
P_i	E_i	Datos arrojados	Elementos detectados		
E_1	Identificar el punto a de la Figura 1. Medir la distancia desde cero. Observar, es mayor porque se toma toda una unidad de la a y sólo una de la b .		Identificar el punto a . Medir la distancia desde cero. Es mayor porque se toma toda una unidad de la a y sólo una de la b .	No se relaciona la identificación del punto a con el valor de la fracción. No se evidencia si se mide la distancia desde cero para calcular el numerador o el denominador. No hay relación entre el punto a y la fracción 5/6.	En E_1 , E_2 y E_3 , se encuentran acciones como medir, contar, mirar y comparar que no se logran relacionar con el punto a y la fracción 5/6, esto indica que los elementos detectados corresponden más a una descripción ocular, que a una secuencia de pasos que permitan al lector llegar a un tratamiento de la situación.
P_1	Para poder resolver si es mayor o menor e igual, hay que mirar los puntos de la figura y los números. Luego hay que mirar el punto a y contar las rayas señaladas y hacer la comparación. Luego de haber contado ahí nos podemos dar cuenta de que es mayor.		Hay que mirar los puntos de la figura y los números. Luego hay que mirar el punto a y contar las rayas señaladas. Hacer la comparación.	No hay evidencia de qué puntos y qué números son los que se miran. No se evidencia si se cuentan las rayitas para calcular el numerador o el denominador. No se evidencia qué tipo de comparación.	
E_3	Miro en dónde se encuentra el punto a . El número 5/6 es mayor que el punto a , pues el punto a está en el número 1.		Miro en dónde se encuentra el punto a . El número 5/6 es mayor que el punto a , pues el punto a está en el número 1.	No se logra saber cuál es el objetivo de mirar el punto a . Existe una confusión ocular entre el punto a , (5/6) y el número 1.	

Tabla 12. Análisis de conversión grupo tres.

Proceso a analizar:		Conversión	Situación (S ₁):	Ubicación de racionales en la recta (II) y Recorrido en la recta numérica (IV)		
Unidades significantes						
P ₁	E ₁	Datos arrojados	Registro de partida (p/q)	Corresp. semántica	Registro de llegada (recta)	Convergencia /divergencia
	E ₁	Ubicar en la recta. Dividir la unidad.	a. ubicar en la recta. b. dividir la unidad.	El punto a y b corresponden a palabras sueltas que no corresponden con el proceso a seguir para ubicar a 7/2.		En E ₁ , E ₂ y E ₃ se observa la convergencia en la ubicación incorrecta de 2/3 y 7/2 en la recta numérica, es decir, la confusión del numerador con el denominador no permite hacer un proceso correcto de conversión.
P ₄	E ₂	Se mira la cantidad o sea, la fracción. Si la recta termina en el punto del numerador se alarga la raya y de ahí se divide, luego se toma la cantidad del denominador.	a. si la recta termina en el punto del numerador se alarga la raya y de ahí se divide. b. se toma la cantidad del denominador.	En el punto a y b se observa confusión del numerador con el denominador.		
	E ₃	Miro en dónde está el número 7. Desde allí cuento 2 líneas y allí está 7/2.	a. miro dónde está el número 7. b. desde allí cuento 2 líneas y allí está 7/2.	En el punto a y b se observa confusión del numerador con el denominador.		

4. CONCLUSIONES

Cuando hay que hacer tratamiento (suma o división), antes de convertir del registro p/q al registro gráfico en la recta numérica, la posibilidad de fracaso aumenta en un 42,85% (11,1/25,9) (ver Tabla 4).

Los estudiantes que demostraron buen desempeño en los procesos de tratamiento y conversión (Tablas 7 y 8), evidenciaron facilidad en la representación y evocación del objeto matemático en diferentes formas, esto permite confirmar que “un mismo objeto matemático puede darse a través de representaciones diferentes” (Duval, 1999: 13).

El hallazgo de unidades significantes se facilita cuando hay que pasar de un registro X a un registro Y sin una condición previa como el tratamiento (P_4 de la Tabla 14); a la vez, si el problema exige una operación antes del proceso conversión (P_7 de la Tabla 5), la localización de unidades significantes es mucho más compleja y los estudiantes presentan mayor dificultad.

Los estudiantes que demostraron aceptable desempeño en los procesos de tratamiento y conversión (Tablas 9 y 10) presentaron dificultades para representar el objeto de estudio de diferentes formas (fraccionario, gráfico y textual).

Los estudiantes que demostraron bajo desempeño en los procesos de tratamiento y conversión (Tablas 11 y 12), expresan ideas del **qué** hacer, pero fracasan en el **cómo** hacerlo.

REFERENCIAS

Castañares, W. (2000). “La semiótica de C.S. Peirce y la tradición lógica”. Seminario de Estudios Peirceanos. Extraído el 3 de Octubre, 2008 de <http://www.unav.es/gep/Castanares.html>

D'Amore, B. (2005). *Objetos matemáticos y registros semióticos ¿Qué es aprender conceptos matemáticos?* Universidad de Bolzano. Italia.

Duval, R. (1999). *Semiósis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. 2a. ed. Cali: Meter Lang - Universidad del Valle. [Título

original: *Sémiosis et Pensée Humaine. Registres Sémiotiques et Apprendissages intellectuels*. (1995)].

_____. (2006). "La habilidad para cambiar el registro de representación". *La gaceta de la RSME*, Vol. 9.1.

Everaert-Desmedt, N. "Peirce's semiotics". Extraído el 3 de Octubre, 2008 de http://www.uqar.qc.ca/signo/peirce/a_semiotique.asp

Gairín J. (2001). *Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación*. Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza.

Godino, J. (2007). "El enfoque ontosemiótico como un desarrollo a la teoría antropológica en didáctica de la matemática". *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, Vol. 10 No. 02.

Godino, J., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi. (2005). *Una visión de la didáctica Francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática*. Universidad de Granada. España.

Hernández, S., Collado, C. y Baptista, P. (2001). *Metodología de la Investigación*. 4a. ed. Mac Graw Hill.

Ministerio de Educación. (2005). "Pruebas saber". Extraído el 10 de Febrero, 2008, de www.mineducación.gov.co

Strauss, Anselm y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa*. 2a. ed. Bogotá, Colombia: CONTUS-Editorial Universidad de Antioquia.

Vergnaud, G. (1990). "La teoría de los campos conceptuales". Traducción de Juan Díaz Godino. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. CNRS y Université René Descartes. Vol. 10. p. 2-3.