



# Caracterización de los tratamientos en la solución de situaciones sobre la fracción como medida

Juan Pablo Marín-Grisales\*  
Andrea Milena Osorio-Cárdenas\*\*

---

Marín-Grisales, J. P. y Osorio-Cárdenas, A. M. (2020). Caracterización de los tratamientos en la solución de situaciones sobre la fracción como medida. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, 16 (2), 184-208.

---

## Resumen

Este artículo presenta los resultados obtenidos en la investigación: caracterización de tratamientos que emplean docentes de básica primaria en la solución de situaciones relacionadas con la fracción como medida. El objetivo de esta investigación fue describir procedimientos, registros de representación y transformaciones de tratamiento en situaciones de la fracción como medida. La investigación se realizó bajo un enfoque cualitativo de tipo descriptivo a partir de un estudio de caso, empleando el cuestionario escrito con preguntas abiertas y la entrevista no estructurada. Para el análisis de los datos se empleó la codificación axial, abierta y selectiva de las respuestas de los docentes, obtenidas en los cuestionarios y las entrevistas. Se evidencia en los resultados del estudio el rol que cumple el tratamiento en la asignación, conservación y modificación de sentidos a través del uso de modificaciones intrínsecas, mereológicas y posicionales enmarcadas en los procesos de visualización de los docentes.

**Palabras clave:** aprendizaje de la fracción, fracción como medida, representaciones semióticas de objetos matemáticos, docente en servicio, visualización.

---

\* Magíster en Didáctica de la Matemática, Corporación Universitaria de Santa Rosa de Cabal-Risaralda. E-mail: [jpmatematicas@yahoo.es](mailto:jpmatematicas@yahoo.es).  [orcid.org/0000-0002-9529-6240](https://orcid.org/0000-0002-9529-6240). [Google Scholar](#)

\*\* Docente de la Unidad de Calidad-Secretaría de Educación de Manizales (SEM). Instituto Latinoamericano. Estudiante Doctorado en Ciencias Cognitivas, línea cognición y educación. Universidad Autónoma de Manizales-Caldas. E-mail: [andrea.osorio@autonoma.edu.co](mailto:andrea.osorio@autonoma.edu.co).  [orcid.org/0000-0002-5143-2829](https://orcid.org/0000-0002-5143-2829). [Google Scholar](#)

Recibido: 18 de febrero de 2019. Aceptado: 14 de diciembre de 2019



## **Characterization of the treatments in the solution of situations on fraction as a measure**

### **Abstract**

This article presents the results obtained in the research: "Characterization of treatments used by elementary school teachers in the solution of situations related to the fraction as a measure." The research objective was to describe procedures, representation records and treatment transformations in situations of the fraction as measure. The research was carried out under a qualitative descriptive approach from a case study using the written questionnaire with open questions and the unstructured interview. The axial, open and selective codification of the teacher responses obtained in the questionnaires and interviews was used for the analysis of the data. The role of treatment in the allocation, conservation and modification of meaning through the use of intrinsic, mereological and positional modifications framed in the visualization processes of teachers is evident.

**Key words:** fraction learning, fraction as measure, semiotic representations of mathematical objects, teacher in service, visualizations.

### **Introducción**

Las fracciones, como objeto matemático, se han destacado por ser un tema de investigación y enseñanza privilegiado en la didáctica de la matemática. Una comprensión profunda de los conceptos de fracción sigue siendo un desafío para la educación matemática (Simon, Placa, Avitzur & Kara, 2018). Las fracciones pueden verse como un mega-concepto que contiene una serie de significados e interpretaciones, que se admiten y se adquieren según el contexto en que se emplean (Malet, 2010). Por lo tanto, el concepto de fracción no se puede reducir únicamente a la exploración de sistemas concretos y tampoco se puede asociar exclusivamente a la relación parte-todo (Simon et al., 2018). El estudio de la fracción debe extenderse a otras magnitudes, de tal manera que aporte nuevos significados (Gairín y Escolano, 2015).

La comprensión inicial de las fracciones implica algunos desafíos. El aprendizaje de un nuevo campo numérico, en este caso el aprendizaje de las fracciones, no es sencillo para los estudiantes porque su enfoque en la básica primaria ha sido la enseñanza de los números naturales. En segundo lugar, las fracciones generalmente se representan como una relación entre dos números. Dado lo anterior, las fracciones son difíciles para los estudiantes, pero además las formas en que se enseñan a menudo contribuyen a las dificultades que se han descrito (Simón et al., 2018).

En la investigación desarrollada por Simón et al. (2018) señalan cuatro tipos de limitaciones sobre la comprensión de las fracciones en edad escolar identificadas en diversos estudios. La primera de ellas está relacionada con la “ausencia de la fracción como cantidad”, es decir, los estudiantes a menudo tienen la concepción de la fracción como un arreglo en el que  $m/n$  ( $m < n$ ) representa un arreglo en el que un todo está dispuesto en “ $n$ ” partes idénticas y “ $m$ ” de esas partes están designadas. La segunda es la “fracción como dos números”, los estudiantes ven una fracción como un par de números que representan cantidades sin relación particular implícita entre ellas. La tercera es el concepto, limitado, de fracción parte-todo, los estudiantes ven una fracción como un conjunto completo de partes  $n/n$  que forman el todo. Y finalmente, la cuarta limitación, expuesta por los investigadores, se relaciona con la dificultad de comprender la unidad de referencia. La comprensión de las unidades de referencia generalmente no se enfatiza en el desarrollo de los números naturales. Este desarrollo se basa en contar por lo tanto la unidad, que generalmente, se deja implícita.

Para darle sentido a la fracción en el contexto matemático se requiere ligar sus diferentes significados: la fracción parte todo, la fracción como cociente, la fracción como operador, la fracción como porcentaje y la fracción como medida. Cada una de estas formas admite el uso de representaciones semióticas que se suscitan alrededor de transformaciones de tratamiento y conversión (Fandiño, 2009, 2015). Duval (2017a) señala que la clave del trabajo matemático consiste en transformar las representaciones semióticas, dadas en un problema o contexto, en otras representaciones semióticas es aquí en donde las matemáticas difieren de otras ciencias. El mismo autor argumenta que en matemáticas una representación semiótica solo es interesante en la medida en que puede transformarse en otra representación y no primero por el objeto que representa.

Lo que comúnmente se llama conceptualización en matemáticas se basa en la coordinación cognitiva entre el uso de sistemas semióticos muy diferentes para producir nuevas representaciones (Duval, 2017b). El interés de modelar el funcionamiento cognitivo del pensamiento en términos de registros no es teórico, es metodológico porque esto proporciona las herramientas para analizar las dos condiciones necesarias para entender y hacer matemáticas por uno mismo (Duval, 2017a). Siguiendo al mismo autor, la primera condición es la coordinación entre dos registros cuyo desarrollo da la posibilidad de convertir cualquier representación dada de su registro a otro del mismo objeto en otro registro, es llamado el proceso de conversión. La segunda condición es la internalización de las operaciones intrínsecas de cada uno de los dos registros, llamado el tratamiento.

Conviene subrayar que un tratamiento es la transformación de una representación (inicial) en otra representación (terminal) y la conversión es la transformación de la representación de un objeto matemático en otro registro y que además los registros de representación semiótica se pueden formalizar desde el lenguaje común, el lenguaje aritmético, el lenguaje algebraico, el lenguaje figural y el lenguaje pictográfico (Fandiño, 2009, 2015).

En dichas transformaciones aún existen dificultades para articular sentidos y significados. Especialmente cuando un mismo objeto matemático es representado de diferentes maneras y su comprensión requiere generar cambios con respecto a las interpretaciones inicialmente dadas (Rojas, 2014). Es decir, en situaciones enmarcadas dentro del contexto matemático, reconocer procesos que conllevan al uso de diversos registros y la articulación de sentidos al parecer no es tan sencillo e inmediato. Posiblemente la dificultad que se presenta radica en los procedimientos generados para realizar cambios de un registro de representación a otro dentro del mismo.

En atención a estas reflexiones, se examinaron algunas observaciones de clase realizadas en los grados cuarto y quinto de primaria en las cuales se analizaron procesos de enseñanza del objeto matemático fracción. Dichas observaciones permitieron evidenciar dificultades en los docentes frente a la articulación de sentidos, especialmente cuando la situación requería transformaciones de tratamiento y cuando el docente debía generar comparación de dimensiones de un objeto con la unidad, definir el área de una región sombreada, asignar una medida y hacer uso de diversas magnitudes coincidiendo en gran parte con las dificultades reportadas

en Rojas (2014), Fandiño (2009, 2015), Santi (2011), D'Amore (2006) y que por ende motivaron a centrar la atención del estudio en este tipo de transformaciones.

Dado lo anterior, se propuso como objetivo de la investigación caracterizar registros de representación y transformaciones de tratamiento en situaciones de la fracción como medida en docentes de básica primaria. Se analizan dos aspectos centrales de la fracción como medida: el objeto matemático fracción y las transformaciones de tratamiento. El objeto matemático fracción se analizó desde la comprensión de la longitud y la superficie. Las transformaciones de tratamiento se analizaron desde la asignación de sentidos, los procesos operatorios y las modificaciones operatorias enmarcadas dentro de los procesos de visualización planteados por Duval (2003, citado en Marmolejo, 2010).

El estudio realizado por Marmolejo (2010) señala: 1) la enorme complejidad de la visualización que muestra el error de quienes la consideran obvia y espontánea y 2) el reconocimiento de las posibilidades que brinda esta actividad cognitiva. Esto manifiesta la importancia de explorar el tratamiento desde este tipo de transformaciones y los aportes que puede brindar en el campo de las matemáticas. Un elemento esencial dentro de los procesos de visualización es la aprehensión. Duval (1995) se refiere a la aprehensión para dar cuenta acerca de la manera en que una figura juega una función heurística en el desarrollo de una actividad matemática. El mismo autor propone cuatro tipos de aprehensiones: la perceptual, la operatoria, la discursiva y la secuencial. Las que se analizaron en el trabajo son la aprehensión operatoria y la perceptual.

## **Materiales y métodos**

188

### **Enfoque de la investigación**

El estudio se enmarcó en el enfoque cualitativo de tipo descriptivo-interpretativo que requiere describir e interpretar información de los participantes. La investigación cualitativa busca comprender e interpretar los fenómenos desde la realidad de los participantes en su ambiente natural (Hernández, Fernández y Baptista, 2014), en este caso la práctica de aula relacionada con la enseñanza de la fracción como medida y con su contexto. Su alcance descriptivo permite detallar cómo son y cómo se manifiestan las características de personas, grupos, procesos objetos

(Hernández et al., 2014), en este caso caracterizar los procedimientos, registros de representación y transformaciones de tratamiento en situaciones de la fracción como medida en docentes de básica primaria.

### **Diseño metodológico**

La investigación se desarrolló a partir de un estudio de caso con ocho docentes de básica primaria de una institución educativa del sector público. En este tipo de estudios se considera la unidad en función de su cultura (Hernández et al., 2014). En este sentido, los investigadores señalan que los grupos estudiados, en este caso los docentes, poseen algunas de las siguientes características: los docentes que conforman la unidad de trabajo mantienen interacciones regulares y lo han hecho durante cierto tiempo en la institución educativa, representan en este caso una manera de asumir un proceso educativo, comparten creencias, comportamientos y otros patrones, así como una finalidad común frente a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Jiménez y Comet (2016) mencionan que la investigación cualitativa es amigable con los estudios de caso en vista de que abordan temas que ameritan análisis profundos y acercamientos reales al contexto donde se desarrolla el fenómeno.

Se tuvo en cuenta el tratamiento como unidad de análisis central del estudio. Los tratamientos son transformaciones de representaciones que ocurren dentro del mismo registro (Duval, 2016a). “tratamiento es el que hace relevante la elección del ‘mejor’ cambio de registro (economía de medios, más potencia para la generalización, o más intuitivo...) para resolver el problema dado” (Duval, 2006, p. 149). Se analizaron aspectos de modificación interna con respecto a los múltiples registros de representación semiótica y la articulación, modificación o conservación de sentidos respecto a una situación determinada en el marco de la fracción como medida.

Así mismo, el análisis de esta categoría consideró la experiencia adquirida en los docentes frente a los procesos de enseñanza y aprendizaje sobre la fracción, el uso de diversos registros de representación y las transformaciones de tratamiento. Duval (2016b) señala que no se puede analizar profundamente y entender el problema de la comprensión en matemáticas, para la mayoría de estudiantes, si no se comienza por separar los dos tipos de transformación de representaciones. El mismo investigador señala que esto se hace rara vez y si se hace es porque la

“conversión se juzga como un tipo de tratamiento o porque se cree que depende de la comprensión conceptual, es decir, una actividad puramente ‘mental’, asemiótica” (p. 91).



**Diagrama 1.** Categoría de análisis organizada en subcategorías, modificaciones y procesos.

Es importante resaltar que la gama de modificaciones posibles tiene que ver con las modificaciones mereológicas, posicionales y ópticas (Duval, 2003, citado en Marmolejo, 2010) y las intrínsecas (Marmolejo y González, 2011). Dichas modificaciones corresponden a los tipos de aprehensión figural, comprendidos dentro de los procesos de visualización planteados por Duval (1995), el cual señala que este tipo de procesos cubren dos niveles diferentes de operaciones independientes entre sí, los cuales, la mayoría de veces se fusionan en la sinergia del mismo acto. Estos dos niveles de operaciones son reconocimiento discriminatorio de formas y la identificación de objetos correspondientes a formas reconocidas (Duval, 2016a).

Las modificaciones comprendidas en esta investigación se relacionan con la aprehensión operatoria, la cual tiene lugar en los tratamientos figurales y las diversas reconfiguraciones. Por otro lado, los procesos en cuanto a la fracción como medida están relacionados con aspectos geométricos y métricos asignados a transformaciones discontinuas y asignaciones numéricas (Vasco, 2015). En la tabla 1 se presenta la definición de cada modificación operatoria relacionada en el diagrama 1.

**Tabla 1.** Modificaciones operatorias presentes en la categoría de tratamiento (Marmolejo, 2010).

Modificaciones mereológicas	Modificaciones centradas en las relaciones entre las partes y el todo.
Modificaciones ópticas	Modificaciones que apelan a la imagen de la figura, por ejemplo, cuando se agranda, disminuye o se deforma la figura inicial.
Modificaciones posicionales	Modificaciones frente al cambio de la figura en cuanto a su orientación, es decir, cuando se rota o se desplaza la figura de partida como las sub-figuras.
Modificaciones intrínsecas	Modificaciones que tienen que ver con la transformación de la organización perceptiva de la figura de partida en lo interno, bajo la introducción o inhibición de trazos.

Por lo tanto, la categoría de tratamiento está enmarcada en acciones de medición que señalan aspectos pre-métricos adquiridos por los docentes a lo largo de su experiencia, los cuales se incluyen en situaciones de la medida para atribuir sentido. Godino (2002) señala que para el desarrollo del sentido de la medida es necesario enfrentar a los estudiantes a situaciones donde ellos puedan emplear los procedimientos de la medida y atribuir sentido al uso del lenguaje y normas que regulan la actividad de medir.

### **Técnicas y materiales de recolección de información**

Como técnicas de recolección de información se emplearon el cuestionario escrito con preguntas abiertas y la entrevista no estructurada (Hernández et al., 2014) para caracterizar los tratamientos en la solución de situaciones relacionadas con la fracción como medida. El cuestionario escrito con preguntas abiertas se aplicó de manera individual a través de dos tareas. Los cuestionarios (imagen 1) se materializaron a través de unas tareas diseñadas a partir de gráficos y preguntas metacognitivas (Orrego, Ruíz y Tamayo, 2016) que involucraban situaciones relacionadas con la fracción como medida.

Para el desarrollo de cada tarea se solicitó a los docentes justificar sus procedimientos, exponer los registros utilizados y responder verbalmente a una entrevista abierta, grabada y codificada para su posterior transcripción. Lo anterior con el fin de ampliar la información y poder triangular los datos. La triangulación

busca utilizar diferentes métodos de recolección y análisis de datos para la saturación de las categorías (Hernández et al., 2014)

1. A continuación observarás un rectángulo con dos regiones pintadas de negro. Cada una de las regiones representa una forma distinta de dividir la unidad. La superficie que ocupa cada una de las regiones está determinada por un área específica que al compararla con la unidad (rectángulo) pueden ser expresadas como fracción.



- a. ¿Al observar las dos regiones pintadas de negro y comparar entre sí, es posible afirmar que tienen áreas iguales? ¿Cómo puedes justificar tu respuesta? Puedes hacer un dibujo, pintar o trabajar sobre la gráfica.
- 
- b. ¿A qué fracción de la unidad corresponde la medida de cada región sombreada? ¿Ambas miden lo mismo?

Imagen 1. Cuestionario escrito.

Posterior al diseño del cuestionario escrito se elaboró una matriz de operacionalización para señalar cada ítem de acuerdo con su propósito, proceso y objetivo específico, con el fin de identificar el alcance de cada tarea, relacionar su categoría inicial y dar inicio a la recolección de información (imagen 2).

ACTIVIDAD	TAREAS	ÍTEM	Propósito	Proporción/comparación	Apunta: Objetivo Específico/sentido o significado
ACTIVIDAD 1 PARTE A	<p>A continuación observarás un rectángulo con dos regiones pintadas de negro. Cada una de las regiones representa una forma distinta de dividir la unidad. La superficie que ocupa cada una de las regiones está determinada por un área específica que al compararla con la unidad (rectángulo) pueden ser expresadas como fracción.</p> 	a. ¿Al observar las dos regiones pintadas de negro y comparar entre sí es posible afirmar que tienen áreas iguales? ¿Cómo puedes justificar tu respuesta?	Identificar los significados parciales que el estudiante asume frente al área de cada región sombreada.	Comparación	Obj.2 Sentido
		b. ¿A qué fracción de la unidad corresponde la medida de cada región sombreada? ¿Ambas miden lo mismo?	Identificar que tratamientos utiliza el estudiante para determinar el área de cada región sombreada haciendo uso de la fracción.  Identificar si el estudiante establece relaciones de equivalencia entre ambas áreas a pesar de que son representadas de diferente manera.	Comparación	Obj.1 significado
		c. Es posible representar de otra manera cada una de las regiones sombreadas de tal forma que se conserve su medida? Explicar cómo lo harías y luego representálas a través de un dibujo	Identificar los posibles tratamientos en el registro pictórico que utiliza el estudiante para conservar la medida de ambas áreas.  Observar que registros utiliza el estudiante para justificar la conservación de las medidas en cada transformación de tratamiento.	proporción	Obj.1 Sentido

Imagen 2. Matriz de operacionalización para el cuestionario escrito.

## Plan de análisis

Para llevar a cabo el plan de análisis de los datos se tuvo en cuenta lo propuesto por Hernández et al. (2014). Para la saturación de categorías se empleó la codificación axial, abierta y selectiva (Corbin y Strauss, 2016) de la información recolectada en los cuestionarios escritos y las entrevistas no estructuradas. En los “procesos comunicativos que tienen lugar en la educación matemática, no sólo hay que interpretar las entidades conceptuales, sino también las situaciones problemáticas y los propios medios expresivos y argumentativos” (Godino, 2012, p. 54). El plan de análisis estuvo centrado en las intervenciones escritas y orales de los docentes para seleccionar oraciones con sentido que aludieran al uso de diferentes registros de representación semióticas y tratamientos en situaciones relacionadas con la fracción como medida.

## Resultados

### El tratamiento en la solución de situaciones de la fracción como medida

Los registros de representación semiótica que emplean los docentes mediante el tratamiento en situaciones de la fracción como medida son: el registro pictórico, el lenguaje común y el registro aritmético. Se identificó que, de 105 oraciones con sentido, 46 correspondieron al uso del registro “pictórico”, 40 al registro “lenguaje común” y 19 al registro “aritmético”. La tendencia general frente al uso de representaciones semióticas es mayor en el lenguaje pictórico y el lenguaje común. En un estudio realizado por Vásquez-Ortiz y Alsina (2016), se identifica que estudiantes de grado cuarto usan con mayor tendencia el lenguaje común para hablar sobre probabilidades y esto se da porque apenas inician el estudio de estos conceptos. Por lo tanto, esto nos permite inferir que los docentes conocen poco sobre el lenguaje de las fracciones, en este caso de la fracción como medida. En otras palabras, los conceptos sobre la fracción son complejos con un alto grado de abstracción, por lo que es necesario avanzar de manera gradual hacia la comprensión adecuada del lenguaje específico de las fracciones para así aproximarse a su comprensión.

Al analizar el tratamiento en el registro pictórico se evidenció que hay varios procesos vinculados. Estos procesos hacen parte de aspectos geométricos y

métricos asignados a transformaciones discontinuas y asignaciones numéricas (Vasco, 2015) y a su vez a los tipos de aprehensión figural, comprendidos dentro de los procesos de visualización planteados por Duval (1995), que incluyen las modificaciones intrínsecas, mereológicas, posicionales y ópticas.

**Tabla 2.** Procesos y modificaciones operatorias evidenciadas en las unidades de registro.

Unidad de registro	Docentes								Frecuencia Procesos y modificaciones	Docentes								Frecuencia final
	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8		D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	
Pictórico									Intrínsecas	5	3	5	3	3	3	2	1	25
									Descomposición	5	3	7	5	5	2	7	3	37
									Mereológicas	2	4	4	3	1		5	2	21
									Proporción	1	3	1	2	0	1	1	2	11
									TOTAL								94	

La tabla 2 muestra los procesos y tipos de aprehensión figural evidenciados en las unidades de registro. El uso de la descomposición con 37 unidades de registro y las modificaciones intrínsecas con 25 unidades de registro de un total de 94, son los procesos más notorios. En la imagen 3 se observa que la docente **D1** descompone la figura en varias partes y diseña un nuevo registro pictórico, conservando la medida. Se infiere que en la nueva representación de **D1** busca dividir en dos mitades la región sombreada, para que al ubicarlas una seguida de otra conserven su medida. Así mismo, **D1** busca que la región sombreada de negro inferior se fraccione en dos partes y se ubique en una nueva posición. A continuación, se presenta la siguiente intervención verbal de la **D1**:

“Trazando dos de estos, saldría este y luego trazando este triángulo hasta acá. Este que queda acá y partir de estas dos, sacando este triángulo acá y este otro trazándolo acá”.

<b>D1-T-1c<sup>2</sup></b>	
<p><b>Situación:</b></p> <p>Representar de otra manera cada una de las regiones sombreadas en la figura 1 de tal forma que se conservara su medida.</p>	
<p><b>Tratamiento D1:</b></p>	

**Imagen 3.** Proceso de descomposición dentro del registro pictórico de **D1**.

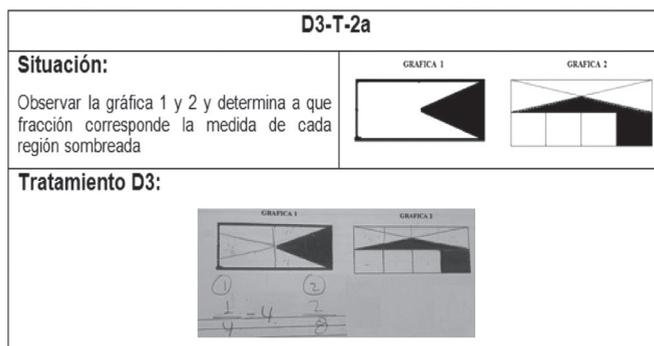
Se infiere de lo anterior que durante el tratamiento realizado por **D1** mediante el proceso de descomposición es importante el uso de los trazos. Al parecer, este recurso le permitió representar y visualizar los cambios en el mismo registro. El proceso de descomposición observado está mediado por el movimiento de secciones sacadas a partir de algunas divisiones en la figura.

Al analizar el proceso de descomposición en el registro pictórico, se identificó que para los docentes resulta práctico descomponer la figura en varias partes, unir sesiones, agrupar, cambiar posiciones, usar patrones, comparar, partir sesiones e incluso desplazar partes de ellas en varias direcciones. Al parecer, el uso frecuente de este proceso se debe a la regularidad de actividades que involucran el tangram, los puzles y rompecabezas en el aula de clase. Alsina y Planas (2008) señalan que la composición y descomposición de figuras mejora el conocimiento de las mismas y sus propiedades.

### **Análisis en cuanto a las modificaciones intrínsecas**

En la imagen 4 se puede observar que **D3** recurre al trazo como herramienta para dividir cada una de las gráficas en partes relativamente iguales. En la imagen 3 se observa que los trazos ayudan visualmente al docente a establecer relaciones de equivalencia entre las partes para definir un valor a la medida. Por otro lado, se evidencia en la imagen 4 que **D3** generó varios trazos para encontrar relaciones

en dos sentidos: una con respecto a un rectángulo y otra con respecto a la forma de un triángulo. En este último el docente asume que la región sombreada está compuesta por dos figuras con medidas semejantes, lo que permite definir un valor a la medida a través de la fracción. De lo anterior, se infiere que los trazos le permiten al docente encontrar relaciones de comparación entre varias figuras para encontrar una medida equivalente.



**Imagen 4.** Modificaciones intrínsecas dentro del registro pictórico de D3.

Cabe señalar que entre los procesos de descomposición y las modificaciones intrínsecas se evidenciaron relaciones colindantes. En varias unidades de registro donde se presentó descomposición también se observaron modificaciones intrínsecas. Los docentes realizaron trazos para indicar la descomposición y en otros casos hicieron descomposición de una figura para luego explicarla a través de trazos. Es decir, cuando se transforma “la organización perceptiva de la figura de partida a nivel interno bajo la introducción o inhibición de trazos” (Marmolejo y González, 2011).

### **Análisis en cuanto a las modificaciones mereológicas y la proporción**

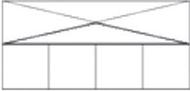
Para el caso de la imagen 5 se evidencia la representación de una unidad dividida en partes iguales para determinar una razón. A partir del análisis se infiere que en las modificaciones mereológicas los docentes buscan establecer relaciones de equivalencia entre las partes a través del uso de números racionales. Es decir, los docentes ven la posibilidad en la figura que puede ser dividida en diversas subfiguras, a partir de las cuales se puede transformar en otra figura de un contorno global, diferente o no (Marmolejo y Restrepo, 2005). Los autores señalan que esta

característica es propia de las modificaciones mereológicas pues ponen en juego las relaciones existentes entre las partes y el todo.

<b>D8-T-1c</b>	
<b>Situación:</b> ¿Es posible representar de otra manera cada una de las regiones sombreadas de tal forma que se conserve su medida?	
<b>Tratamiento D8:</b>	

**Imagen 5.** Modificaciones mereológicas y el proceso de proporción dentro del registro pictórico de D8.

En la imagen 6 se presenta una situación particular que indica la relación entre las modificaciones mereológicas y el proceso de proporción. Se puede deducir que la docente **D3** tuvo problemas para definir la relación parte-todo debido a que la imagen 5 no estaba dividida en partes iguales. En consecuencia, la docente diseñó una nueva representación para indicar la fracción  $10/16$ . Se infiere de los datos que algunos docentes asumen las modificaciones mereológicas desde el término “partes iguales” o “congruentes”, siendo este un obstáculo en la construcción del conocimiento de la fracción como parte-todo (Fandiño, 2009, 2015).

<b>D3-T-2d</b>	
<b>Situación:</b> ¿Si quiero que representes $\frac{10}{16}$ del área en la GRAFICA 3 que arías?	 Grafica 3
<b>Tratamiento D3:</b>	

**Imagen 6.** Modificaciones mereológicas y el proceso de proporción dentro del registro pictórico de D3.

Un proceso que emerge de este análisis y que permite a los docentes establecer una relación entre las partes y el todo es la proporción, con 11 unidades de registro. Este proceso se relaciona en los datos y con las modificaciones mereológicas. Esto permite inferir que los docentes usan dichos procesos para establecer relaciones de equivalencia entre las partes y para descomponer objetos en partes iguales o congruentes. Marmolejo y Restrepo (2012) exponen que “la productividad heurística genera ideas, procesos y posibilidades que permiten reconocer los tratamientos matemáticos susceptibles de traer a colación para resolver la actividad propuesta” (p. 13).

### **Análisis del tratamiento en el registro lenguaje común**

En el análisis se identificaron 40 oraciones de unidades de registros que corresponden al uso del lenguaje común en las transformaciones de tratamiento. El lenguaje natural es un registro multifuncional y estos parecen ser comunes y de muy fácil acceso para los estudiantes (Duval, 2016 b), en este caso los docentes. Sin embargo, expresa Duval en la enseñanza se tiende a marginar el uso de los registros multifuncionales que privilegian los registros monofuncionales.

Se analizaron los procesos que hacen parte de aspectos geométricos y métricos, como también los tipos de aprehensión figural comprendidos dentro de los procesos de visualización para observar la incidencia del lenguaje en los tratamientos. La tabla 3 muestra los procesos y modificaciones inmersos en el tratamiento a través del lenguaje común, entre los cuales destacan la descomposición y las modificaciones posicionales. Es necesario resaltar que las descomposiciones mereológicas de las figuras es uno de los procedimientos más antiguos que se empleaban en la antigüedad (Edwards, 1979; citado en Duval, 2016 a) y que por esto se destaca su uso en los docentes. Frente a las modificaciones posicionales es importante su uso durante el desarrollo de la tarea porque la productividad heurística de una figura tiene que ver con las modificaciones producidas en ella, gracias a una operación cognitiva determinada (Marmolejo y Restrepo, 2012), en este caso el uso de las modificaciones posicionales.

**Tabla 3.** Procesos y tipos de aprensión figural inmersos en el tratamiento de la fracción como medida haciendo uso del lenguaje común.

Unidad de registro	Docentes								Frecuencia	Procesos	Docentes								Frecuencia
	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8			D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	
LENGUAJE COMÚN									40	Intrínsecas									12
										Descomposición									
										Posicionales									
										Mereológicas									
										1	2	1	2	2	0	3	1	12	
										4	4	5	4	4	5	5	4	35	
										1	2	2	2	1	6	3	5	22	
										1	0	3	1	0	0	4	2	11	

En la imagen 7 se observa que el uso de la palabra “dividirla” y “juntar” indica la necesidad de **D4** de plantear una descomposición sobre cada una de las gráficas utilizando transformaciones discontinuas. Al parecer, el uso del “lenguaje común” en el proceso de descomposición muestra la intención previa del docente y las ideas que tiene sobre el tratamiento posterior.

**D4-T-2a**

<p><b>Situación:</b> Observar la gráfica 1 y 2 y determina a que fracción corresponde la medida de cada región sombreada Explica tu respuesta.</p>	 
<p><b>Tratamiento D4 en el registro: lenguaje común</b> <i>Para mi tocaría dividirla en partecitas igualitas primero que todo. Coloreado esta con esta se junta y queda esta coloreada. Luego tomo esta con esta se junta y queda esta. (Discurso tomado del anexo 5C-4 ítem 2a).</i></p>	

**Imagen 7.** Proceso de descomposición dentro del registro lenguaje común de **D4**.

Se infiere que el lenguaje común es relevante en el tratamiento cuando el docente pretende descomponer una figura. El uso del lenguaje común le permite al docente expresar diversas descomposiciones que surgen mentalmente frente a una imagen o cuerpo geométrico. Duval (2003, citado en Marmolejo, 2010) señala que no se puede evitar el uso del lenguaje natural porque este origina la articulación con los registros monofuncionales. Es paradójico en los hallazgos identificar como los docentes usan constantemente las representaciones multifuncionales para resolver las tareas cuando en la enseñanza privilegian los registros monofuncionales (Duval, 2016b).

En cuanto a las modificaciones posicionales se logra identificar que la ubicación espacial juega un papel importante en la solución de la tarea (ver imagen 8). La docente plantea la posibilidad de reubicar ciertas regiones tratando de conservar su magnitud y medida: “La ubico en el espacio vacío casa igual” (D8). Por lo tanto, se infiere que en el cambio de posición la docente **D8** busca generar acciones como girar, meter o casar. Dichas acciones ayudan a que la docente genere sentidos que permiten comparar y analizar la situación planteada desde diferentes perspectivas. Al parecer, el uso de las modificaciones posicionales está articulado con las transformaciones isométricas, con las cuales el docente está acostumbrado a trabajar en sus actividades escolares.

D8-T-1a	
<p><b>Situación:</b> ¿Al observar las dos regiones pintadas de negro y comparar entre sí, es posible afirmar que tienen áreas iguales?</p>	
<p><b>Tratamiento D8 en el registro: lenguaje común</b></p> <p><i>Si dibujo la parte sombreada y la ubico en el espacio vacío casa igual. Este triángulo de acá al meterse acá daría igual. (Discurso tomado del anexo 5C-5 ítem 1b).</i></p>	

**Imagen 8.** Modificaciones posicionales dentro del lenguaje común con el uso del tratamiento en D8.

Dado lo anterior se puede señalar “una brecha oculta entre el proceso visual del tratamiento y los varios procesos discursivos que se pueden utilizar” (Duval, 2016b, p. 75). El uso de estos cambios posicionales a través del lenguaje común ayuda al docente a visualizar acciones orientadas a las transformaciones de tratamiento posteriores en otro registro de representación. Dichas transformaciones se originan desde la traslación, la simetría axial y la rotación.

Ahora bien, durante el análisis se pudo observar que las modificaciones posicionales están mediadas por las modificaciones mereológicas, ya que los docentes buscaron que la distribución de las partes de una gráfica y su cambio de posición coincidieran con espacios iguales o congruentes a las mismas. Se infiere, por lo tanto, que reconocer partes iguales o descomponerlas en una imagen, facilita al docente el proceso de visualización y la integración con el pensamiento espacial. Marmolejo, Guzmán e Insuaty (2015) señalan “que las posibilidades de exploración heurística que permiten las figuras se encuentran íntimamente relacionadas con la gama de modificaciones posibles que se pueden realizar sobre una figura” (p. 48). Además, dichos investigadores expresan que por cada modificación que existe, se dan varias operaciones cognitivas que ofrecen a las figuras su productividad heurística.

### **Análisis del tratamiento en el registro lenguaje aritmético**

En cuanto a las transformaciones de tratamiento, se identificaron 19 unidades de registro correspondientes al uso del lenguaje aritmético. De estos se desprenden procesos de operacionalización, modificaciones mereológicas, la razón y la proporción. Cabe aclarar que el uso del lenguaje aritmético, en las transformaciones de tratamiento, hace alusión a las representaciones y operaciones que los docentes utilizan a través de la escritura fraccionaria, decimal, potencial o porcentual (Fandiño, 2009, 2015).

**Tabla 4.** Procesos y tipos de aprehensión figural evidenciados en las unidades de registro que dan cuenta del tratamiento en situaciones de la fracción como medida, usando el registro aritmético.

Unidad de registro	Docentes								Frecuencia	Procesos	Docentes								Frecuencia
	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8			D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	
ARITMÉTICO										Operacionalización	1	3	2	4	0	1	1	1	13
	1	4	4	5	0	2	2	1	19	Mereológicas	1		1	1	0				3
										Razón	0	2	1	0	0	1			4
										Proporción	0	0	1	3	0		1		5

La frecuencia observada frente al uso del registro aritmético en el tratamiento representa la tendencia más baja en esta investigación frente al uso de otras representaciones semióticas. A partir de este análisis se evidencia que lo anterior tiene relación con obstáculos, dificultades o prevenciones que presentan los docentes en el uso de las fracciones y los números racionales. Fandiño (2009) reporta en su trabajo algunas de estas dificultades relacionadas con el ordenamiento, la operacionalización, el adjetivo igual, la equivalencia, entre otras.

El proceso con mayor frecuencia en el uso del “lenguaje aritmético”, tiene que ver con la operacionalización. La operacionalización está relacionada con diversos cálculos o procedimientos asociados a las “siete operaciones aritméticas fundamentales: suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación” (Jiménez, 2007, p. 24). En esta investigación las operaciones aritméticas son examinadas desde las fracciones.

En la imagen 9 se muestra que, desde la operacionalización, la suma de fracciones heterogéneas es uno de los procedimientos más frecuentes. Sin embargo, en varios casos se observó una solución incorrecta, la cual posiblemente se deba a dificultades conceptuales que presentan los docentes en este tipo de operación. Fandiño (2009, 2015) hace alusión a esta dificultad señalando que existen mayores conflictos en la adición y sustracción de fracciones heterogéneas, sumados al poco sentido que se le asigna a través de la aplicación de reglas formales.

D2-T-1e	
<p><b>Situación:</b> ¿Qué procedimiento se puede llevar a cabo para demostrar que la medida como fracción obtenida al unir ambas áreas es equivalente a la suma de las áreas en la figura original?</p>	
<p><b>Tratamiento D2 en el registro: lenguaje aritmético</b></p>	
	

**Imagen 9.** Operacionalización dentro del registro aritmético de D2.

Se evidencia en el análisis que los docentes tienen en cuenta otros procesos a través del registro aritmético los cuales corresponden a la “razón” y la “proporción”. Se demostró en los datos que ambos procesos conservan relación puesto que fundamentan el razonamiento proporcional que conlleva a varios procesos cognitivos interrelacionados entre sí. Buforn, Llinares y Fernández (2018) exponen que estos procesos cognitivos pueden ir desde el pensamiento cualitativo hasta el razonamiento multiplicativo.

En la imagen 10 se puede dar cuenta del uso de estos procesos y su articulación. El D2 utilizó la razón para indicar las partes en las que está dividida cada gráfica. Al parecer, el uso de este proceso permitió a la docente expresar su intención y el tratamiento generado. Se observó además que la docente generó tratamientos dentro de ambos registros aritméticos (simplificación), aludiendo a la proporción para presentar la igualdad entre ambas razones.



**Imagen 10.** Razón y proporción asumidos en el registro aritmético por la docente **D2**.

## Conclusiones

### Desde los tratamientos

Frente a la transformación de representaciones en el tratamiento, se puede concluir que en la solución de la tareas de la fracción como medida, los docentes durante el proceso requieren la articulación de varios conceptos matemáticos, tales como razón, proporción, escritura fraccionaria, entre los que se identificaron dificultades conceptuales y procedimentales especialmente en la suma de fracciones heterogéneas y la articulación del sentido que conlleva a la conservación de la medida en divisiones discontinuas de la unidad, proceso complejo para los docentes. Por otro lado, está el dominio de los procesos dentro de la visualización tales como la: aprehensión figural, las modificaciones mereológicas (en donde las partes de la unidad necesariamente deben ser iguales).

Otro elemento concluyente en el trabajo es el uso de los diferentes registros de representación empleados por los docentes. Los docentes privilegian el uso del lenguaje común y esquemas pictóricos en las transformaciones de tratamiento. Al parecer el uso de estos registros se debe a la integración de elementos geométricos y métricos tales como la descomposición y la proporción, como también a los tipos de aprehensión figural comprendidos dentro de la visualización que incluyen las modificaciones mereológicas, intrínsecas y posicionales.

En el uso del registro del lenguaje común se resalta el hecho de que los docentes acuden a las transformaciones isométricas para proponer, planear y argumentar sus tratamientos. El uso de estas transformaciones se articula con modificaciones posicionales desde la traslación, la simetría axial y la rotación. Para los docentes, el uso de estos cambios posicionales a través del lenguaje común les permitió visualizar acciones orientadas a las transformaciones de tratamiento posteriores en otros registros de representación.

En la solución de situaciones relacionadas con la fracción como medida la relación del registro pictórico-aritmético fue importante en los datos. Durante la solución de las tareas, se logró evidenciar que dichos registros se complementan para encontrar relaciones que permiten generar otro tipo de tratamientos y explicitar sus procesos.

### **Desde los procesos de visualización**

El proceso de descomposición está directamente relacionado con la visualización dado que se requiere de algún modo la comprensión directa de la gráfica para su modificación. Este proceso, a través del uso del lenguaje común, permitió mostrar la intencionalidad del docente y las ideas que tenía sobre el tratamiento posterior. Además, ayudó al docente a expresar las diversas descomposiciones que surgen mentalmente frente a una imagen para su posterior tratamiento.

La descomposición y composición de imágenes a través del registro pictórico permitió a los docentes generar comparaciones frente a toda la unidad para determinar el valor en cuanto a la medida. Además, encontrar patrones parecidos dentro de la figura, comparar características del objeto y contrastar información para sacar conclusiones.

Se concluye frente a las modificaciones intrínsecas son un elemento clave en la descomposición y por ende en la solución de situaciones relacionadas con la fracción como medida. Estas permanecen inmersas en el registro pictórico y el lenguaje común. Además, permitieron al docente mediar la descomposición a través del uso de trazos, ya que establecieron relaciones de comparación entre las partes de una gráfica y el todo. En las modificaciones posicionales se destacan acciones como recortar, mover, girar, pero también la relación con el uso de puzzles por parte de los docentes.

Finalmente, la investigación permitió los resultados desarrollados por Rojas (2014) en cuanto a la importancia que tienen las transformaciones de tratamiento en la modificación o conservación del sentido y el significado. Además, en las reflexiones de Duval (2016b), las transformaciones son fuentes de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, en este caso, de los profesores de educación primaria.

## Referencias bibliográficas

- Bufo, Á., Llinares, S. y Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestros españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 23(76), 229-251.
- Corbin, A. y Strauss, J. (2016). *Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Medellín, Colombia: Universidad de Antioquia.
- D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Número especial, 177-195.
- Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processing. En Sutherland R. y Mason J. (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, Springer, Berlín, 142-157.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La gaceta de la RSME*, 9(1), 143-168.
- Duval, R. (2016a). *Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 13-60). Bogotá, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Duval, R. (2016b). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 61-94). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Duval, R. (2017a). Mathematical activity and the transformations of semiotic representations. En: *Understanding the mathematical way of thinking-The registers of semiotic representations*. Springer International Publishing (21- 44).
- Duval, R. (2017b). The Registers: Method of Analysis and Identification of Cognitive Variables. En: *Understanding the mathematical way of thinking–The registers of semiotic representations*. Springer International Publishing (73-112).

- Fandiño, M. I. (2009). *Las fracciones aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio.
- Fandiño, M. (2015). Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos. *Tendencias en la educación matemática basada en la investigación*, (1), 25-38.
- Gairín, J. y Escolano, R. (2015). *Modelos de medida para la enseñanza del número racional en educación primaria*. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 1, 17-35. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2219009>
- Godino, J. D. (2002). *Matemáticas para maestros*. Granada, España: Universidad de Granada, Departamento Didáctica de la Matemática.
- Godino, J. D. (2012). *Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la matemática*. En Estepa, A., Contreras, Á., Deulofeu, J., Penalva, M. del C., García, F. J. y Ordóñez, L. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49-68). Granada, España: Universidad de Granada.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. México, DF: McGraw-Hill.
- Jiménez, J. (2007). *Guía para el examen Piense II (matemáticas)*. México: Umbral Editores, S.A. de C.V.
- Jiménez, N. y Comet, C. (2016). *Los estudios de casos como enfoque metodológico*. *ACADEMO Revista de Investigación en Ciencias Sociales y Humanidades*, 3(2). Recuperado de <https://revistacientifica.uamericana.edu.py/index.php/academo/issue/view/5>
- Malet, O. (2010). Los significados de las fracciones: una perspectiva fenomenológica. *Revista digital de matemáticas Mendom@tica*, 21. Recuperado de <https://www.yumpu.com/es/document/view/14168436/los-significados-de-las-fracciones-una-perspectiva-fenomenologica>
- Marmolejo, G. y Vega, M. (2005). Geometría desde una perspectiva semiótica: visualización, figuras y áreas. *Memorias XV Encuentro de Geometría y III de Aritmética*. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/5985/1/MarmolejoGeometr%C3%ADaGeometr%C3%ADa2005.pdf>
- Marmolejo, G. (2010). La visualización en los primeros ciclos de la educación básica. Posibilidades y complejidad. *Revista Sigma*, 2(10), 10-26. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3714823>

- Marmolejo, G. y González, M. T. (2011). La visualización en la construcción del área de superficies planas en la educación básica. In *Un instrumento de Análisis de libros de texto. Conferencia presentada en Asocolme* (Vol. 12, pp. 6-12).
- Marmolejo Avenia, G. A. y Vega Restrepo, M. B. (2012). La visualización en las figuras geométricas: Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación matemática*, 24(3), 7-32.
- Marmolejo-Avenia, G. A., Guzmán, L. Y. e Insuaty, A. L. (2015). Introducción a las fracciones en textos escolares de educación básica ¿figuras representaciones estáticas o dinámicas? *Revista Científica*, 3(23), 43-56.
- Orrego, M., Tamayo, O. y Ruiz, F. (2016). *Unidades didácticas para la enseñanza de las ciencias*. Manizales, Colombia: Editorial Universidad Autónoma de Manizales.
- Rojas, P. J. (2014). *Articulación de saberes matemáticos representaciones semióticas y sentidos* (colección tesis doctoral). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Revista Educational Studies Mathematics*, 77, 285-311. doi: 10.1007/s10649-010-9296-8
- Simon, M. A., Placa, N., Avitzur, A., & Kara, M. (2018). Promoting a concept of fraction-as-measure: A study of the Learning Through Activity research program. *The Journal of Mathematical Behavior*, 52, 122-133.
- Vasco, C. E. (2015). *Los Sistemas Métricos en la Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias*. Manuscrito no publicado.
- Vásquez-Ortiz, C. y Alsina, A. (2016). Aproximación a la probabilidad en el aula de Educación Primaria. Un estudio de caso sobre los primeros elementos lingüísticos. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 529-538). Málaga, España: SEIEM.