Verdades antiguas y modernas[*]

Ancient and modern truths

David Miller
Universidad de Warwick, Reino Unido. discufilo@ucaldas.edu.co

Recibido el 19 de enero de 2011 y aprobado el 4 de abril de 2011

Resumen

Este artículo presenta una comparación de las teorías de verdad, y las soluciones a la paradoja del mentiroso, propuestas por Tomas Bradwardino (c. 1290–1349), Jean Buridan (c. 1295–1358), y Alfred Tarski (1901–1983). Además realiza una breve crítica a la posición expuesta por Read en su artículo: *The liar and the new T-schema.*

Palabras clave

Autorreferencia, Bradwardino, Buridan, Tarski, paradoja del mentiroso, método de diagonalización, teoría de la significación, teorías de la verdad.

Abstract

This paper undertakes a comparison of theories of truth and the solutions to the paradox of the liar advanced by Thomas Bradwardine (c. 1290–1349), Jean Buridan (c. 1295–1358), and Alfred Tarski (1901–1983). In addition, it offers a brief criticism to Read's point of views as expounded in his paper: *The liar and the new T-schema.*

Key words

Self-reference, Bradwardine, Buridan, Tarski, paradox of the Liar, diagonalization method, theory of meaning, theories of truth.

[*] Agradezco a Stephen Read por sus comentarios útiles, y a Ana María Oliva, Raúl Andrés Jaramillo, y Diego Rosende por su ayuda con las sutilezas de la lengua española.

0. INTRODUCCIÓN

El tema central de este artículo es la verdad, y su opuesto, la falsedad, especialmente cuando residen juntos. Es decir, deseo dirigir mi atención una vez más a la antigua paradoja del mentiroso, uno de los problemas más venerables de la lógica. Mi pretexto por volver sobre un asunto tan familiar y tan ampliamente explorado por otros, es la resurrección reciente por mi compatriota, el filósofo Stephen Read, de una resolución de esta paradoja, y otras, que fue propuesta en el siglo catorce por Thomas Bradwardine, un inglés poco conocido actualmente pero un hombre de muchas distinciones intelectuales. Read (2008a 2008b 2010) no sólo presenta simpáticamente en vestidura moderna la teoría de la verdad de Bradwardine. También es un partidario decidido de ella, manteniendo que esta teoría es en varios aspectos superior a la teoría predominante en la lógica actual, es decir, la teoría de Alfred Tarski. No estoy de ninguna manera de acuerdo con este juicio. Sin embargo, creo que la contribución de Bradwardine merece nuestra atención, y que podemos aprender mucho y de interés, de una investigación, aunque una investigación concisa, de esta nueva-vieja solución.

1. LA PARADOJA DEL MENTIROSO

Al hablar de la paradoja del mentiroso, puedo dar por sentado la idea general que se tiene de ésta, es decir, un enunciado, al parecer bien construido e inteligible, que es verdadero si & sólo si es falso (o no verdadero). A lo largo de su historia, la paradoja ha asumido muchas formas diferentes, desde la más cotidiana a la más matemática. Hay las declaraciones simples, 'Miento' y 'Estoy mintiendo', en las cuales hay una referencia implícita al tiempo en que la declaración se produce. Además de los enunciados: 'Este enunciado dice algo que es falso' y 'Esto es un enunciado falso', que usan adjetivos o pronombres demostrativos para indicar de qué tratan. En esta situación sigo la costumbre común de llamar tales enunciados *autorreferenciales*, con lo cual quiero decir que es el sujeto gramatical del enunciado, pero no el enunciado en sí mismo, el que hace referencia al enunciado integro.

Una versión importante de la paradoja del mentiroso emplea sólo la autorreferencia indirecta, e indica que la autorreferencia directa no constituye el corazón del problema. Por ejemplo, si Dafnis dice que Cloe habla falsamente, y Cloe dice que Dafnis habla verdaderamente, no hay ninguna atribución consistente de valores de verdad a estos enunciados. Si el enunciado de Dafnis es verdadero, el de Cloe es falso, en cuyo caso el enunciado de Dafnis es falso también; entonces, el enunciado de Cloe es verdadero, por ende, el enunciado de Dafnis es verdadero después de todo. Viajamos en un círculo completo sin atribuir establemente ni la verdad ni la falsedad a ninguno de los dos enunciados.

Existen versiones de la paradoja cuya eficacia depende de una premisa empírica que no aparece explícitamente. Por ejemplo, hay la paradoja de Epiménides el cretense, el cual dijo que todos los cretenses son unos mentirosos; es decir, que todos los cretenses siempre e indefectiblemente pronuncian falsedades. Este enunciado de Epiménides no puede ser verdadero, lo cual implica que no todos los cretenses pronuncian indefectiblemente falsedades. Es decir, existe un cretense, o Epiménides u otro, que una vez, por lo menos, dice algo que es verdadero. Es asombroso que la mera declaración epimenideana pueda tener tal desenlace.

El inverso de esta paradoja es la paradoja de Curry (Goldstein 1986), el enunciado que afirma: 'Si este enunciado es verdadero entonces Dios existe'. Si este enunciado condicional es falso, su antecedente es verdadero, y luego el condicional no es falso sino verdadero, y además tiene un antecedente verdadero. Por medio de la regla de *modus ponens* (o la tabla de verdad para el condicional), podemos concluir que el consecuente es verdadero también; es decir, que Dios existe. De esta manera podemos demostrar *ab initio* cualquier enunciado que deseamos demostrar.

Debo mencionar además la paradoja, así llamada, del *veraz*, que es un enunciado que atribuye la verdad, y nada más, a sí mismo. El problema aquí es que no parece haber ninguna consideración que pueda ayudarnos a dar un valor de verdad a este enunciado.

En este artículo, para evitar una serie de problemas que se asocian con el uso de pronombres y adjetivos demostrativos, expresiones indéxicales, y otras locuciones idiomáticas que introducen en el asunto un elemento poco formal, y a veces innegablemente empírico, quiero decir que me refiero por paradoja del mentiroso a una versión que se genera por el método de diagonalización que Gödel inventó en 1931.

Lo que sigue es una adaptación de una construcción de Tarski que está escondida en la nota 11 de su popular artículo (1944), y rara vez es mencionada. Si y es un enunciado de la forma 'b tiene B', sea la *transformada* y^* de y el enunciado '"b tiene B" tiene B'. Por ejemplo, y puede ser el enunciado verdadero: 'El título de la novela que García Márquez escribió en el Hôtel des Trois Collèges en Paris en 1957 tiene precisamente siete palabras', en este caso y^* es el enunciado falso, '"El título de la novela que García Márquez escribió en el Hôtel des Trois Collèges en Paris en 1957 tiene precisamente siete palabras" tiene precisamente siete palabras'. Sea z el enunciado 'b tiene una transformada falsa'. Entonces z^*, la transformada de z, es '"b tiene una transformada falsa" tiene una transformada falsa'. Es evidente intuitivamente que z^* es verdadero si & sólo si la transformada de z es falsa, es decir, si & sólo si z^* es un enunciado falso. Podemos construir del mismo modo un ejemplo de la paradoja del veraz. Sea x el enunciado 'b tiene una transformada verdadera'. Su transformada x^*, es decir, '"b tiene una transformada verdadera" tiene una transformada verdadera' es equivalente al enunciado 'x^* es verdadero'.

De ahora en adelante, z^* (o cualesquiera otros enunciados similares construidos por el método de diagonalización) tendrá el nombre **U**, y se llamará un *mentiroso*. Un enunciado como x^* se llamará un *veraz*. Sin embargo, el sujeto gramatical del enunciado **U**, es decir, la frase nominal '"b tiene una transformada falsa"', no refiere a **U** (sino a z). **U** no es un enunciado autorreferencial en el sentido usual, aunque dice algo sobre sí mismo.

Notamos también un punto de gran importancia: si asumimos la tabla clásica de verdad por la operación de negación, es decir, que un enunciado y es verdadero si & sólo si su negación $\neg y$ es falsa, entonces la negación ¬**U** de **U** es igualmente un mentiroso, puesto que ¬**U** es verdadero si & sólo si **U** es falso, es decir, si & sólo si **U** es verdadero, es decir, si & sólo si ¬**U** es falso. Este enunciado ¬**U**, es decir, '"b tiene una transformada falsa" tiene una transformada verdadera', puede parecer aún menos autorreferencial que **U**, porque no podemos identificar ¬**U** con ninguna expresión mencionada en ¬**U**. Tanto **U** como ¬**U** dicen algo sobre **U**, pero uno sólo de ellos es **U.** No obstante, esta simetría es ilusoria. Para ver este punto, si un enunciado y tiene la forma 'b tiene B', sea la *contratransformada* y^+ de y el enunciado '"b tiene B" no tiene B'. Sea z el enunciado 'b tiene una transformada falsa', como lo fue más arriba, y dejemos que z^+, la contratransformada de z, se llame **W**. Entonces **W** y **¬U** son interdeducibles, lo mismo que **¬W** y **U**. Tanto **W** como **¬W** dicen algo sobre **W**, pero sólo uno de ellos es **W**. Brevemente, **¬U**, que es equivalente a **W**, no es menos autorreferencial que **U**. Diremos que **U**, y otros mentirosos como **¬U**, **W**, y **¬W**, exhiben el fenómeno de la *reflexividad*.

Una solución antigua a la paradoja del mentiroso, formulada un siglo antes de Bradwardine, es el *casacionismo* (Goldstein 2008), que juzga que las locuciones reflexivas son muchas veces, o siempre, sin sentido, no dicen nada, y deben ser excluidas del lenguaje. Un enfoque que es superficialmente similar es el *restriccionismo*, que emplea medios menos drásticos para proscribir la autorreferencia en casos específicos (Panaccio 2008). Que el casacionismo va demasiado lejos es evidente por lo menos cuando recordamos que en Gran Bretaña, por ejemplo, muchos libros en tapa rústica imponen la siguiente condición de venta:

> Este libro se vende sujeto a la condición que, sin obtener por adelantado el permiso del editorial, no será, por comercio o de otro modo, prestado, revendido, arrendado o hecho circular en cualquier otra forma de encuadernación o cubierta excepto aquella en la cual se publica y sin imponerse una condición semejante *incluida esta condición* al comprador subsiguiente.

En ausencia de la frase autorreferencial destacada, Dafnis pudo revender legalmente el libro original intacto a Cloe, exigiéndole sólo que no lo encuaderne. Cloe pudo en el acto revenderlo a Dafnis incondicionalmente. Entonces él pudo reencuadernarlo, y venderlo nuevamente a Cloe. La condición prevista de venta habría sido esquivada. Otra sugerencia relacionada es que todos los enunciados supuestos que directa o indirectamente puntualizan sus propios valores de verdad carecen de significado (o, por lo menos, de valor de verdad), y hay que descartarlos. Esta propuesta también excluye demasiado. Podemos, por ejemplo, construir por diagonalización dos enunciados **J** y **K** que son deducibles mutuamente con '**J** y **K** tienen el mismo valor de verdad' y '**J** y **K** tienen valores de verdad opuestos' respectivamente. Porque **J** y **K** son mutuamente contradictorios, tienen valores de verdad opuestos; y por tanto, **J** es falso y **K** es verdadero. Se pueden determinar los valores de verdad definitivamente sin ninguna inconsistencia. Por mi parte, soy reacio a rechazar tales enunciados y otras expresiones reflexivas como tonterías.

2. EL ESQUEMA DE VERDAD

Por tal motivo, estamos presionados para identificar una premisa falsa en la derivación de cada contradicción. Parece que fue Stanisław Leśniewski, el maestro de Tarski, el primero en señalar la asunción implícita de bicondicionales de la forma '"La nieve es blanca" es un enunciado verdadero si & sólo si la nieve es blanca'[1]. La mayoría de estos bicondicionales son poco controvertidos (Quine 1951) (podría citarlos como ejemplos de enunciados supuestamente analíticos, más interesantes, especialmente en español, que '*All bachelors are unmarried*'), pero algunos son contradictorios. Dada la identidad de **U**, un ejemplo es el bicondicional '**U** es verdadero si & sólo si "*b* tiene una transformada falsa" tiene una transformada falsa'.

Todos estos bicondicionales pueden unirse en el esquema infinito

$$(\mathbf{T})\ \ \mathrm{V}(x) \ \leftrightarrow\ p,$$

donde cualquier nombre de un enunciado sustituye la letra '*X*', y el enunciado cuyo nombre sustituye '*X*' sustituye la letra '*p*'. Más exactamente, para que el esquema (**T**) tenga exclusivamente instancias que son válidas sólo por razones lógicas y lingüísticas, hay que restringir las sustituciones posibles por '*X*' a los nombres estructural-descriptivos de los enunciados. Quiero decir que debemos considerar sólo los nombres de enunciados que revelan cómo el enunciado se construye a partir de sus componentes. Para los propósitos de nuestra discusión, el rasgo más importante de un nombre estructural-descriptivo a de un enunciado es que podemos decidir en la teoría de fondo (usualmente un fragmento de la teoría de conjuntos) la fórmula $a \in \ell$, es decir, si el enunciado cuyo nombre estructural-descriptivo es a pertenece al lenguaje cuyo nombre estructural-descriptivo es ℓ o no. Para mayor simplicidad, trataré de restar importancia a esta distinción entre los nombres estructural-descriptivos y otros nombres, y no enfatizarla pedantemente.

Un nombre citacional de un enunciado, como '"La nieve es blanca"', que nombra el enunciado 'La nieve es blanca', es un nombre estructural-descriptivo. Observen, sin embargo, que el esquema (**T**) no puede escribirse en la forma cuantificada $\forall p$ [V ('p') $\leftrightarrow$ p]. Los peligros de

[1] Véase Tarski (1944), nota 7.

sustitución en las comillas son bien conocidos. Aquellos que prefieren atribuir la verdad y la falsedad a las proposiciones usualmente hacen algo bastante similar; es decir, combinan los bicondicionales de (**T**) en la declaración universal 'Por cada proposición *p*, es verdadero que *p* si & sólo si *p*'. Puesto que la variable '*p*' no es utilizada uniformemente aquí, es incierto si esta declaración es bien formada. Sin embargo, supondremos que la cuantificación proposicional tiene buen sentido.

De cualquier modo que se afirmen las condiciones de verdad para los enunciados significativos, el esquema (**T**) precisa algún ajuste, a pesar de que expresa lo que Wright (1992: 27) llama 'la perogrullada de correspondencia' ('*the correspondence platitude*'). Así, consideraré tres enfoques para poner (**T**) en orden: aquellos de las luminarias medievales Thomas Bradwardine y Jean Buridan, expuestos por Read (2008a), y aquél de Alfred Tarski. El tercer enfoque es bien conocido, y el segundo no es desconocido. Aunque su presentación (2008a) es bastante opaca a veces; al presentar la teoría de Bradwardine confiaré substancialmente en la exposición de Read, quien utiliza él mismo, y modifica, la exposición pionera de Spade (1981). Pero, trataré de eliminar de ella varias infelicidades y oscuridades, y presentarla de la manera más efectiva. Cada enfoque tiene el gran mérito de trabajar enteramente dentro de los límites de la lógica clásica; esto es, por cierto, la intención de cada enfoque, a pesar de que en realidad, como veremos, ninguno de los tres enfoques nos da una teoría de verdad que sea verdaderamente clásica.

3. LAS TEORÍAS DE THOMAS BRADWARDINE (C. 1290–1349)

Thomas Bradwardine, nombrado arzobispo de Canterbury en 1349, sólo para sucumbir a la peste unas pocas semanas más tarde, se involucró en muchas esferas de erudición, incluida la física (Grant 1965), las matemáticas (Boyer capítulo III), la teoría de probabilidades (Bellhouse § 3), la teología (Leff 1957), y la lógica (Read 2010). Chaucer le menciona por su nombre en *Los cuentos de Canterbury*.

Su solución a la paradoja del mentiroso consiste en realidad en dos teorías distintas, una doctrina embrionaria de significación o de *saying that*, que se presenta axiomáticamente, y que vincula cada enunciado con aquellas proposiciones que él significa (en un sentido que satisfaga los postulados) y una definición, en esos términos, de la verdad.

Salvo su empleo de la categoría de proposiciones (más que enunciados), que algunas personas considerarán extravagante, esta doctrina de significación puede parecer poco extraordinaria. Según Read, ella contiene tres postulados por lo menos. Hay uno de *explicitud*, que dice que cada enunciado significa lo que afirma explícitamente. Utilizando los dos puntos '**:**' para abreviar indiferentemente el verbo 'significar' en el sentido especializado, y todas sus inflexiones, podemos expresar formalmente este postulado por el esquema

$$(\mathbf{E})\ X \mathbin{\mathbf{:}} p,$$

donde (como en el esquema restringido (**T**) más arriba) cualquier nombre estructural-descriptivo de un enunciado sustituye la letra 'X', y el enunciado cuyo nombre sustituye 'X' sustituye la letra 'p'. La restricción a los nombres estructural-descriptivos es requerida solamente para mantener un estatus analítico–lingüístico para (**E**). Por supuesto, el título de la novela que García Márquez escribió en el Hôtel des Trois Collèges en Paris en 1957 significa la proposición que el coronel no tiene quién le escriba, tanto como el enunciado 'El coronel no tiene quién le escriba' la significa, pero lo primero es una cuestión de hecho histórico, antes que una verdad analítica o lingüística, y no debe incluirse en tal postulado de la semántica como (**E**).

Es preciso señalar que, como las instancias del esquema (**T**), las instancias del esquema (**E**) no manifiestan una relación entre un enunciado y una proposición, sino algo más abstracto. Podemos pensar en el símbolo '**:**' como un operador proposicional parametrizado; '$X \mathbin{\mathbf{:}} p$' está al mismo nivel que la expresión '$K_A p$', que a veces se usa en la lógica epistémica para significar 'el agente A sabe que p'.

Hay además otros dos postulados que gobiernan la seudorelación **:** de significación; en estos postulados, el de *clausura* (**K**) bajo la relación de implicación lógica, y el de *adjunción* (**C**), las variables 'x', 'p', y 'r' desempeñan una función más general:

$$(\mathbf{K})\ \ \forall x \forall p \forall r((x \mathbin{\mathbf{:}} p \mathbin{\&} p \Rightarrow r) \rightarrow x \mathbin{\mathbf{:}} r),$$

$$(\mathbf{C})\ \forall x \forall p \forall r((x \mathbin{\mathbf{:}} p \mathbin{\&} x : r) \rightarrow x \mathbin{\mathbf{:}} p \quad r).$$

Aquí la variable 'x' recorre enunciados, mientras que la variable 'p' recorre proposiciones. El símbolo '$\Rightarrow$' representa la relación de implicación lógica entre proposiciones. Read apenas se da cuenta del esquema (**E**), y Spade (*ibídem* nota 26) la combina con el esquema (**K**) de clausura. En §7 más abajo haremos lo mismo, produciendo un postulado (**E+**) más fuerte, pero querremos aumentar (**K**) aún en otra dirección. Por el momento es preferido mantener (**E**) y (**K**) separados. Comoquiera que se presente la teoría de la significación de Bradwardine, sin duda ella requiere una asunción que evite que la seudorelación **:** sea vacía. Esto es el propósito de (**E**), que, a pesar de ser trillado, es bastante más controvertido que (**K**) y (**C**). El postulado (**C**) desempeña un papel limitado en la secuela.

Juntos, los postulados (**E**), (**K**), y (**C**) requieren que el conjunto de las proposiciones que un enunciado x significa constituya un sistema de cierre o un sistema deductivo en el sentido de Tarski (1935–1936). Es conveniente además escribir '$x :: p$' para señalar que x significa que p y nada más que p y sus consecuencias lógicas (como requiere el postulado de clausura (**K**)). De momento todo es soso.

Independientes de estos postulados, pero empleando la seudorelación : de significación, son la definición de verdad que propuso Bradwardine, y su análisis de algunos enunciados autorreferenciales. Su propuesta fue que un enunciado es verdadero si & sólo si (en las palabras de Read) 'las cosas son enteramente como el enunciado significa' (6); más formalmente, la declaración

$$(\mathbf{A})\ \forall x(\mathrm{V}(x) \quad \leftrightarrow \quad \forall p(x : p \to p))$$

sustituye el esquema (**T**). Aquí, como en (**K**) y (**C**), la variable 'x' recorre enunciados, y la variable 'p' recorre proposiciones. Se puede leer (**A**) de esta manera: un enunciado x es verdadero si & sólo si por cada proposición p, si x dice que p, entonces p. El uso doble de la variable proposicional 'p' debe inculcar inquietud, pero trataré aquí de despreciarla.

Debemos notar que, en la presentación de Read, la flecha '$\Leftrightarrow$' con dos astiles (y dos flores) sustituye la flecha simple '$\leftrightarrow$' en (**A**), que se presenta como una declaración de equivalencia lógica. Sin embargo, ni siquiera el bicondicional material puede desviar la paradoja del mentiroso, como veremos, y por ende, no hay ningún provecho (y quizá una pérdida sustanciosa) al reemplazarlo con un bicondicional estricto.

La definición (**A**), según Read, constituye una mejora y una extensión del esquema (**T**). Para hablar un tanto libremente, un enunciado puede significar una proposición que no implica, mas no hay ninguna asunción general de que lo vaya a hacer, y si no lo hace podemos simplificar el lado derecho de (**A**), sustituyéndolo por 'p'. Para cualquier enunciado tal que x tiene un nombre estructural-descriptivo, la definición (**A**) y el esquema (**T**) afirman lo mismo[2].

No obstante, ocurre algo inesperado cuando sustituimos 'x' en (**A**) por un nombre estructural-descriptivo '**L**' de un enunciado **L** que significa su propia falsedad, es decir, un enunciado **L** para el cual $\mathbf{L} : \neg V(\mathbf{L})$. Supongamos que todo lo demás que **L** significa pueda compendiarse en la proposición q. En este caso, $\mathbf{L} :: \neg V(\mathbf{L}) \wedge q$. Read entiende el cuantificador universal en la definición (**A**) de tal manera que es posible deducir de (**A**) la equivalencia

$$(\mathbf{AL})\ \ V(\mathbf{L}) \ \leftrightarrow\ \neg V(\mathbf{L}) \wedge q,$$

de donde se puede deducir tanto que $\neg V(\mathbf{L})$ como que $\neg q$. En otras palabras, puede probarse que es falso (no verdadero) el enunciado **L**. Es importante observar que no se puede probar $V(\mathbf{L})$, a pesar que se puede probar **L**. Para establecer esta imposibilidad, dejé que la seudorelación $x : p$ se cumpliera para cualesquiera x y p, y que Vx fallara para cada x.

De las dos proposiciones que **L** intentó e*x*plícitamente significar, una, a saber $\neg V(\mathbf{L})$, puede probarse, dado (**A**), y otra, a saber q, puede refutarse. Asumiendo el postulado (K), según el cual la significación es cerrada bajo la implicación lógica, Bradwardine procedió a mostrar que **L** significa además $V(\mathbf{L})$. Este resultado Read lo pone en alto relieve, y Restall (2008: 142), lo describe como 'la contribución mas interesante de Bradwardine a la discusión'. Sin embargo, puesto que la proposición $V(\mathbf{L})$, como la proposición q, es contradictoria (dada la definición (**A**)), para mostrar que $\mathbf{L} : V(\mathbf{L})$, es suficiente suponer

$$(\mathbf{KK})\ \forall x \forall p \forall r((x : p \,\&\, p \Leftrightarrow r) \rightarrow x : r),$$

según la cual la significación se cierra bajo la equivalencia lógica.

[2] Sobre la superioridad supuesta de (**A**) por sobre (**T**), véase las discusiones en Miller (2010), p. 434, y en § 4 más abajo.

Es necesario decir algo acerca del modo en que Read entiende el cuantificador universal en la definición (**A**). Si aplicamos con esmero al caso de **L** el postulado

$$(\mathbf{A})\ \forall x(\mathrm{V}(x) \leftrightarrow \forall p(x : p \rightarrow p)),$$

obtenemos

$$(\mathbf{AL-})\ \mathrm{V}(\mathbf{L}) \leftrightarrow (\mathbf{L} : \neg\mathrm{V}(\mathbf{L}) \rightarrow \neg\mathrm{V}(\mathbf{L})) \wedge (\mathbf{L} : q \rightarrow q) \\ \wedge \forall p\ ((p \neq \neg\mathrm{V}(\mathbf{L}) \wedge p \neq q) \rightarrow (\mathbf{L} : p \rightarrow p)),$$

del cual Read extirpa el tercer conyunto, puesto que (según nuestra hipótesis) **L** significa solamente las dos proposiciones $\neg\mathrm{V}(\mathbf{L})$ y q (y sus consecuencias lógicas, que no necesitamos considerar separadamente). Si (**A**) fuese un bicondicional estricto, este paso sería cuestionable (Mills, 2008: § 6.3), porque la asunción $\mathbf{L} :: \neg\mathrm{V}(\mathbf{L}) \wedge q$ no es evidentemente algo demostrable, pero es poco censurable si (**A**) es un bicondicional material. Se puede continuar el argumento al simplificar el primer conjunto (**AL−**), pero no el segundo, produciendo en lugar de (**AL**),

$$(\mathbf{AL=})\ \mathrm{V}(\mathbf{L}) \leftrightarrow [\neg\mathrm{V}(\mathbf{L}) \wedge (\mathbf{L} : q \rightarrow q)].$$

Del argumento previo, se puede concluir que $\neg\mathrm{V}(\mathbf{L})$ y que $\neg(\mathbf{L} : q \rightarrow q)$, es decir que $\neg\mathrm{V}(\mathbf{L})$ y que $\mathbf{L} : q$ y que $\neg q$. Después de todo, es posible demostrar que **L** significa una contradicción, a saber, que q. Si (**A**) es un bicondicional material, el argumento de Bradwardine que $\mathbf{L} : \mathrm{V}(\mathbf{L})$, puede concluirse como se hizo anteriormente.

Sin embargo, en cualquier caso podemos deducir de (**AL**), interpretado estrictamente, el condicional material

$$(\mathbf{AL\equiv})\ \mathrm{V}(\mathbf{L}) \rightarrow \neg\mathrm{V}(\mathbf{L}) \wedge (\mathbf{L} : q \rightarrow q),$$

del cual se puede concluir nuevamente $\neg\mathrm{V}(\mathbf{L})$. Pero, no se ve ningún camino hasta la conclusión de que **L** significa una contradicción, y que significa también su propia verdad.

Podemos desactivar también otra cuestión, planteada por Sandu (2007): '¿por qué debemos suponer que se puede expresar en una proposición simple todo lo que el mentiroso significa?'. Sandu procede a afirmar que porque 'hay una infinitud de proposiciones que el mentiroso expresa…

es posible desplegar el argumento de Read adecuadamente sólo en un metalenguaje infinitario' (139) (las cursivas están suprimidas). Esto no es completamente correcto. Se puede repetir el argumento para cualquier teoría deductiva **Q** en lugar de la proposición q, y si V(**L**) es una proposición expresada por un enunciado simple, entonces la prueba de Bradwardine muestra que la teoría **Q** es contradictoria, y de ese modo axiomatizable. Sin embargo, es sólo en este sentido que la axiomatizabilidad de **Q** es una parte de la asunción que V(**L**) $\wedge$ **Q** es axiomatizable.

De todos modos, con (**A**) sólo no tenemos todavía una solución a la paradoja tradicional del mentiroso, porque (**A**) no asegura que existe aún un enunciado **L** por el cual **L :** ¬V(**L**). Sin el postulado (**E**), u otro parecido, el análisis precedente es vano. Pero en la presencia del postulado (**E**), el mentiroso **U** es efectivamente neutralizado por el tratamiento de Bradwardine, comoquiera que se interpreten los cuantificadores. Esto es sin duda un logro notable. Pero, como veremos, no basta.

4. El enfoque de Jean Buridan (c. 1295–1358)

Es instructivo comparar el enfoque poco conocido de Bradwardine con un enfoque que se puede asociar con su contemporáneo, Jean Buridan. Las opiniones alteraron durante su vida, pero parece que mantuvo en una vez que cada enunciado x significa dos proposiciones (y sus consecuencias lógicas) y nada más: lo que x dice explícitamente (esto es (**E**)), y la proposición que expresa su propia verdad V(x). Esta propuesta de Buridan, dicho más cuidadosamente, equivale a extender el esquema (**E**) a

$$(\mathbf{EB})\ \mathrm{X}\ \mathbf{::}\ \mathrm{V}(X) \wedge p,$$

donde, como en (E), cualquier nombre estructural-descriptivo de un enunciado sustituye la letra 'X', y el enunciado cuyo nombre sustituye 'X' sustituye la letra 'p'. Combinando este postulado enriquecido de significación con la definición (**A**) de verdad propuesta por Bradwardine, obtenemos

$$(\mathbf{B})\ \mathrm{V}(X) \;\leftrightarrow\; \mathrm{V}(X) \wedge p,$$

que es equivalente lógicamente a una mitad del esquema (**T**), a saber

$$(\mathbf{TB})\ \mathrm{V}(X) \to p.$$

Buridan cuenta el mentiroso **U** como falso (no verdadero), puesto que $\mathrm{V}(\mathbf{U}) \to \neg\mathrm{V}(\mathbf{U})$ por (**TB**), y entonces $\neg\mathrm{V}(\mathbf{U})$. Los enfoques de Buridan y de Bradwardine están de acuerdo que $\neg\mathrm{V}(\mathbf{U})$ y que $\mathbf{U} : \mathrm{V}(\mathbf{U})$, es decir que **U** es contradictorio.

Read destaca con entusiasmo (§ 1.6) que, pese a este empalme, hay una gran diferencia entre los dos enfoques[3]. Mientras que Buridan asume que $X : \mathrm{V}(X)$ para cada enunciado X, y $\mathbf{U} : \mathrm{V}(\mathbf{U})$ en particular, Bradwardine deduce $\mathbf{U} : \mathrm{V}(\mathbf{U})$ desde (A), junto con el postulado poco controvertido (**K**) de que la significación es cerrada bajo la equivalencia lógica. Para resolver la paradoja del mentiroso, no asume nada más que dos principios acerca de la significación, a saber (**E**) y (**K**), que son apenas revolucionarios, y una definición, a saber (**A**). No hay ninguna asunción manifiesta de que exista algún enunciado que significa más que lo que implica, ni de que no haya ningún enunciado tal. Como notamos, ni siquiera (**K**) sea necesario, y el postulado más débil (**KK**) basta.

Supongo que, sea debido a esta carencia de compromiso, que la solución de Bradwardine parece tan encantadora; pueden preferirse otras soluciones, pero los colaboradores en Rahman, Tulenheimo, & Genot (2008), por ejemplo, la describen diversamente como 'novedosa' (Armour-Garb), 'de mérito sobresaliente' (Dutilh Novaes), 'principesco' (Goldstein), 'intrigante' (Klima), 'admirable en su ambición y su postura' (Mills), 'convincente' (T. Parsons), 'intrigante y provechosa' (Restall), 'un nuevo adelanto' (Sagüillo), y 'audaz' (Serény).

Una paradoja consta de una conclusión inaceptable obtenida válidamente de premisas aceptables, y para inhabilitar la conclusión es suficiente reducir las premisas, sin perturbar su aceptabilidad. No obstante, la mayoría de las soluciones conocidas, por ejemplo aquellas de Buridan (**EB**) y de Russell, adoptan además nuevas asunciones disputables. La solución de Bradwardine parece evitar cualquier controversia semejante, por no introducir ninguna asunción que no estuviera ya presente.

Sin embargo, lo que el argumento de Bradwardine revela no es que él no asumiera nada sobre aquello que **U** pueda significar, adicional a

[3] Véase también Miller (2010), p. 436.

que $\neg$V(**U**), sino que alguna asunción por el estilo fue escondida en la aplicación de la definición (**A**) al enunciado **U**. En términos profesionales, la definición (**A**) es *creativa*, una presunción, no una definición auténtica, precisamente porque ella nos permite deducir desde los postulados (**E**) y (**KK**) una proposición que no es deducible en su ausencia. Un ejemplo es la proposición que $\exists q \exists r((\mathbf{U} : q \mathbin{\&} \mathbf{U} : r) \mathbin{\&} (q \Leftrightarrow \neg r))$; es decir, que **U** significa dos proposiciones q y r (a saber V(**U**) y $\neg$V(**U**)) que son mutuamente contradictorias. Es evidente que no se puede deducir esta proposición desde (**E**) y (**KK**) juntos. Asimismo, podemos mostrar que la extensión, por la definición (**A**) de verdad de Bradwardine, de su teoría completa de significación (la teoría que consta de los postulados ((**E**), (**K**), y (**C**)) no es una extensión conservativa.

Hay que decepcionar aun más la esperanza de que Bradwardine (o tal vez Buridan) hayan abierto los portales a un paraíso lógico. Una serie de problemas serios surgen cuando comparamos el enfoque de Bradwardine con la concepción de Tarski.

5. La teoría de Alfred Tarski (1901–1983)

La concepción semántica de la verdad de Tarski es bien conocida y no precisa un tratamiento extendido aquí. Tarski se propuso proporcionar para los enunciados de cualquier lenguaje elemental $\mathscr{L}$ (el *lenguaje objeto*) una definición explícita de un predicado V a partir de la cual se pudiera deducir 'V(X) $\leftrightarrow$ p' siempre que cualquier nombre estructural-descriptivo de un enunciado de $\mathscr{L}$ sustituya la letra 'X', y el enunciado cuyo nombre sustituya 'X' sustituya la letra 'p'. Es solamente para los enunciados del lenguaje objeto $\mathscr{L}$ que el predicado V de verdad garantiza definir la verdad. Se dice que tal definición es *materialmente adecuada* para $\mathscr{L}$. El lenguaje en que se formula la definición recursiva del predicado V se llama el *metalenguaje* $\mathscr{ML}$ (para $\mathscr{L}$). Los pormenores de la definición, y por qué el metalenguaje ***ML*** es necesariamente más rico que el lenguaje objeto $\mathscr{L}$, no nos incumben aquí. Lo importante es que, por dos razones, el método de Tarski no puede proporcionar una definición universal de la verdad: i) para definir la verdad para los enunciados de $\mathscr{ML}$, hay que emplear un metametalenguaje, y así sucesivamente; ii) el método de definición dado por Tarski se aplica diferentemente a cada lenguaje elemental, y no puede generalizarse a un lenguaje variable[4]. La actitud de Tarski hacia el esquema (**T**) es superficialmente muy diferente de la

[4] Una lista de algunos filósofos (empezando con Black 1949, p. 104) que sancionaron esta crítica se encuentra en la nota 14 de Mou (2001).

actitud de Bradwardine. El primero parece limitar el ámbito del esquema (**T**), mientras que el segundo lo rechaza y lo reemplaza totalmente. Para Tarski el esquema modificado no constituye una definición de la verdad, sino un test de que una definición sea adecuada. Su definición del predicado V de la verdad de enunciados del lenguaje $\mathcal{L}$, dada en términos de la relación de satisfacción, definida recursivamente, es totalmente diferente de (**A**), la definición universal con que Bradwardine reemplaza (**T**). Es obvio, de veras, que la definición de Bradwardine no es adecuada materialmente. Sin embargo, sus soluciones a la paradoja del mentiroso, y la de Buridan también, son estructuralmente bastante similares. Lo que dice Tarski es que solamente los enunciados del lenguaje objeto $\mathcal{L}$ pueden ser verdaderos, y por ende, la forma correcta del esquema (**T**) es equivalente a

$$(\mathrm{T}_{L})\ \mathrm{V}(X) \;\leftrightarrow\; (X \in \boldsymbol{L}) \wedge p.$$

Para aplicar ($\mathbf{T}_{\mathcal{L}}$) al mentiroso **U**, reemplazamos 'X' por '**U**', y 'p' por '$\neg$V(**U**)', con el resultado

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}\mathbf{U})\ \mathrm{V}(\mathbf{U}) \;\leftrightarrow\; (\mathbf{U} \in \mathcal{L}) \wedge \neg\mathrm{V}(\mathbf{U}),$$

de donde se pueden deducir tanto que $\mathbf{U} \notin \mathcal{L}$ como que $\neg$V(**U**) (es decir **U**). Puesto que '**U**' es un nombre estructural-descriptivo de un enunciado que no pertenece al lenguaje objeto $\mathcal{L}$, el enunciado '$\mathbf{U}\notin\mathcal{L}$' puede deducirse en la teoría de fondo. En otras palabras, V(**U**), según ($\mathbf{T}_{\mathcal{L}}$**U**), es equivalente a la conjunción de $\neg$V(**U**) con una contradicción. Esto es precisamente la situación cuando aplicamos la definición (**A**) de Bradwardine al mentiroso **U**, con el resultado

$$(\mathbf{AU})\ \mathrm{V}(\mathbf{U}) \;\leftrightarrow\; (\mathbf{U} : q \rightarrow q) \wedge \neg\mathrm{V}(\mathbf{U})$$

de donde se pueden deducir tanto que $\neg q$ como que $\neg$V(**U**). Las fórmulas (**AL=**) y (**AU**) son análogos. La solución menos sofisticada de Buridan tiene una estructura similar, debido a que obtenemos

$$(\mathbf{BU})\ \mathrm{V}(\mathbf{U}) \;\leftrightarrow\; \mathrm{V}(\mathbf{U}) \wedge \neg\mathrm{V}(\mathbf{U}).$$

Una vez más, la cláusula adicional, a saber V(**U**), es contradictoria.

Debemos notar que, a pesar de estas semejanzas, la definición de Tarski proporciona atribuciones de valores de verdad en casos en que

Bradwardine y Buridan mantienen silencio. Consideren un mentiroso indirecto: **G** = '¬V(**H**)' y **H** = 'V(**G**)'. En las teorías de Bradwardine y Buridan, es deducible que ¬V(**H**), es decir **G** es deducible, pero el valor de verdad de **G** es indeterminado. La teoría de Tarski, que niega el predicado V de todos los enunciados afuera del lenguaje $\mathcal{L}$, implica que ¬V(**G**) y que ¬V(**H**), y por consiguiente implica **G** y ¬**H**. Un ejemplo más peliagudo se presentó en la § 1: los dos enunciados **J** y **K**, que son deducibles mutuamente con '**J** y **K** tienen los mismos valores de verdad' y '**J** y **K** tienen valores de verdad opuestos' respectivamente. Intuitivamente **J** es falso y **K** es verdadero. Bradwardine y Buridan dicen que ¬V(**J**), sin embargo, están mudos en lo que respecta al valor de **K**. Si presentamos **J** y **K** como

$$\mathbf{J} :: \quad [V(\mathbf{J}) \wedge V(\mathbf{K})] \;\; [\neg V(\mathbf{J}) \wedge \neg V(\mathbf{K})],$$
$$\mathbf{K} :: \quad [V(\mathbf{J}) \wedge \neg V(\mathbf{K})] \vee [\neg V(\mathbf{J}) \wedge V(\mathbf{K})],$$

vemos que la teoría de Tarski implica el segundo disyunto, y contradice los otros tres; y por tanto, implica **J** e implica ¬**K**. Es decir, la pobre teoría semántica pronuncia dos decisiones equivocadas, que V(**J**) y que ¬V(**K**). No sé que moraleja extraer de este ejemplo.

Éste es el punto apropiado para indicar que, a pesar de su observancia de la ley lógica del *principio de tercero excluso* (y todas otras leyes clásicas de la lógica) ninguna de las tres definiciones consideradas puede darnos una ley central de la teoría clásica de la verdad, a saber la ley V(*X*) ∨ V¬(*X*) que es equivalente, dadas la tablas clásicas de verdad, a la ley de bivalencia V(*X*) ∨ F(*X*). Esto es inmediato en el caso de Tarski, porque tanto ¬V(*X*) como ¬V(¬*X*) pueden deducirse si un nombre estructural-descriptivo para un enunciado que no pertenece al lenguaje objeto $\mathcal{L}$ sustituye 'X'. En § 1 notamos que si la operación de negación obedece a la tabla clásica de verdad, entonces la negación ¬**U** del mentiroso **U** es igualmente un mentiroso. Como vimos antes, la definición (**B**) de Buridan implica que todos los mentirosos son falsos, y por ende, podemos deducir de (**B**) tanto ¬V(**U**) como ¬V(¬**U**), dado que ¬**U** es un mentiroso; una aplicación de la regla de *reducción al absurdo* muestra que la ley de bivalencia no se puede deducir. Obtenemos el mismo resultado por la definición (**A**) de Bradwardine cuando se fortalece con el postulado (**E**) de explicitud. Un análisis más delicado confirma que la teoría de Bradwardine puede retener la ley de bivalencia (en cuya validez él mismo Bradwardine creyó) si & sólo si sacrifica el postulado (**E**). La teoría de Buridan no tiene escapatoria.

Estos resultados pueden parecer problemáticos si queremos desarrollar una teoría clásica de la verdad. Sin embargo, hay otro punto de vista desde el cual podemos ver la situación. Puesto que estamos adoptando una nueva teoría de la verdad (la de Tarski, o la de Bradwardine, o la de Buridan), ¿por qué creemos que las reglas clásicas de deducción cumplen todavía el principio de la transmisión de la verdad? Lo opuesto parece ser más cierto, porque se puede deducir de cada definición de la verdad por medio de las reglas clásicas (en realidad, las reglas intuicionísticas bastan) el enunciado **U**, es decir que ¬V(**U**). Para mí, no es obvio que aún la regla de $\wedge$-introducción transmite la verdad de Bradwardine, debido a que, en la ausencia de instrucciones apropiadas, no hay equipamiento para excluir la posibilidad que la conjunción $x \wedge z$ signifique una proposición q que no es una consecuencia de cualquier conjunción de proposiciones p y r donde $x : p$ y $z : r$. (Acá asumimos que la seudorelación **:** de significación obedece tanto el postulado (**K**) de clausura como el postulado (**C**) de adjunción.) Lamento que no es posible perseguir más adelante este punto interesante.

6. Una alternativa al esquema (E) de explicitud

La presentación en §§ 5f., de una serie de aspectos de la definición de verdad —más exactamente, el método de definir la verdad— propuesto por Tarski es más o menos estándar. El predicado V se define de tal manera que se aplica (demostrablemente) sólo a los enunciados del lenguaje objeto $\mathcal{L}$; es decir, si 'X' es un nombre estructural-descriptivo para un enunciado afuera de $\mathcal{L}$, podemos deducir de la definición la proposición que ¬V(X). Esto se resume en

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{L}})\ \mathrm{V}(X) \;\leftrightarrow\; (X \in \mathcal{L}) \wedge p,$$

donde se puede reemplazar 'p' y 'X' respectivamente por cualquier enunciado gramatical y uno de sus nombres estructural-descriptivos. Es posible tratar el predicado F de falsedad de una manera estrictamente paralela, produciendo adicionalmente el esquema

$$(\mathbf{F}_{\mathcal{L}})\ \mathrm{F}(X) \;\leftrightarrow\; (X \in \mathcal{L}) \wedge \neg p.$$

Alternativamente, podemos decretar que V y F son contradictorios absolutos, que F(X) si & sólo si ¬V(X), en cuyo caso hay enunciados afuera del lenguaje $\mathcal{L}$ que son falsos. Qué hagamos no importa mucho, siempre y cuando sepamos lo que hacemos. Después de todo, lo que

Tarski deseó hacer fue definir los predicados V y F adecuadamente para los enunciados de $\mathcal{L}$; todos otros enunciados podrían considerarse desechos, para los cuales no importa si los predicados V y F se aplican o no. Para alcanzar esta meta otros estilos de definición habrían sido igualmente efectivos aunque menos intuitivos. Por ejemplo, Tarski pudo haber formulado una definición explícita de no-verdad (en inglés, *untruth*) de los enunciados de $\mathcal{L}$, vía la relación de *insatisfacción*, y su contradictorio *no-falsedad*, dando

$$(\mathbf{T}^{\mathcal{L}})\ \mathrm{V}(X) \ \leftrightarrow\ p \leftarrow (X \in \mathcal{L}),$$
$$(\mathbf{F}^{\mathcal{L}})\ \mathrm{F}(X) \ \leftrightarrow\ \neg p \leftarrow (X \in \mathcal{L}).$$

Bajo tal definición, cualquier enunciado afuera de $\mathcal{L}$ es tanto verdadero como falso (en el sentido que podemos demostrar tanto que $\mathrm{V}(X)$ como que $\mathrm{F}(X)$ si un nombre estructural-descriptivo por aquél enunciado sustituye 'X', y el enunciado él mismo sustituye 'p'). Sin embargo, es evidente que para los enunciados de $\mathcal{L}$, una definición que proporciona ($\mathbf{T}^{\mathcal{L}}$) es materialmente adecuada.

Esta posibilidad sugiere un enfoque alternativo a la seudorelación de significación empleada por Bradwardine. Es evidente que la intención de su teoría es distinguir (en principio) lo que un enunciado implica —su contenido lógico— y lo que significa. Dijo que '[c]ada enunciado significa o quiere decir todo que se sigue de él' (Read, § 13.1; Spade 120), que puede escribirse esquemáticamente así:

$$(\mathbf{E+})\ X \models \mathrm{Z} \rightarrow X : r.$$

Aquí dos nombres estructural-descriptivos de cualesquiera dos enunciados sustituyen 'X' y 'Z', el enunciado cuyo nombre sustituye 'Z' sustituye 'r', y $\models$ representa la relación de implicación lógica entre enunciados. Brevemente, un enunciado significa todas las proposiciones que implica. Es fácil mostrar que, en la presencia del postulado (**K**) de clausura, el esquema (**E+**), que es muy cercano a lo que Spade llama el principio de Bradwardine (BP), es equivalente lógicamente al postulado (**E**) de explicitud. La formulación (**E+**) muestra claramente que (**E**) permite, pero no demanda, que un enunciado signifique más que lo que implica lógicamente. Más arriba no hice ninguna tentativa de defender el esquema (**E**), prefiriendo juzgarlo por sus efectos. Ahora es el tiempo de ser más inquisitorio y considerar una alternativa.

Supongamos que Bradwardine y Read, en lugar de ser ingleses, y usualmente propensos a la atenuación [*understatement*], hubieran sido pescadores, y propensos a la exageración. Cuando los oradores exageran, lo que significa un enunciado puede ser menos que lo que dice explícitamente. Una manera de la cual un orador puede exagerar es por afirmar incondicionalmente lo que quiere decir sólo condicionalmente. El significado pensado del enunciado es una consecuencia propia de lo que el enunciado afirma explícitamente. Observamos más arriba que, en la presencia del postulado (**K**) de clausura, el esquema (**E+**) expresa la teoría de significación que tolera (pero no demanda) atenuación. La teoría inversa, que tolera (pero no demanda) exageración, puede formularse en el esquema

$$(\mathbf{E\text{-}})\ X : r \rightarrow X \models Z,$$

con las mismas convenciones de antes. (**E-**) es muy cercano a lo que Spade llama el principio inverso de Bradwardine (CBP).

Estos dos esquemas (**E+**) y (**E-**) ocupan lugares simétricos a cada lado de su conjunción, es decir, que un enunciado significa precisamente sus consecuencias lógicas: $\forall r(X : r \leftrightarrow p \Rightarrow r)$, donde '$X$' y '$p$' son vinculadas de la manera usual. Esta es la teoría de significación que es implícita en el esquema (**T**). La simetría no es perfecta, pero alcanza a su interacción con el mentiroso **U**. Supongan que es sólo bajo la condición que q que **U** dice o significa lo que afirma explícitamente; es decir, que **U** :: $q \rightarrow \neg$V(**U**). Según la definición (**A**) de Bradwardine, V(**U**) $\leftrightarrow$ ($q \rightarrow \neg$V(**U**)), lo cual implica tanto que V(**U**) como que $\neg q$. Aunque podemos mostrar así que **U** es verdadero (dado (**A**)), no podemos mostrar **U** (es decir, que $\neg$V(**U**)). No es difícil mostrar que (**A**) es creativo en la presencia de (**E-**), (**K**), y (**C**), tanto como en la presencia de (**E+**), (**K**), y (**C**).

La definición (**A**) de verdad de Bradwardine no basta, después de todo, para apaciguar la paradoja tradicional del mentiroso. Los postulados (**K**) y (**C**), aun siendo obviamente restricciones aceptables, tampoco ayudan. Tanto el esquema (**E+**) como el esquema (**E-**) son consistentes con (**A**), (**C**), y (**K**), pero es imposible adoptar los dos simultáneamente sin una vuelta al esquema (**T**) y a la inconsistencia. (Está es la línea de razonamiento que Spade pp. 122, 124, con alguna vacilación, imputa a Bradwardine, por la cual Read, §13.1, lo castiga.) Si (**E+**) se adopta, entonces el mentiroso **U** es un teorema, y la ley de bivalencia fracasa. Si (**E-**) se adopta, entonces su negación ¬**U** es un teorema, y podemos mostrar, por un argumento dual, que la ley de no contradicción fracasa. Entonces, una teoría de verdad que se porta bien clásicamente es disponible sólo si uno de **U** y **¬U** satisface (**E+**) y el otro satisface (**E-**). Read trata de evitar esta conclusión sosteniendo que la negación **¬U** del enunciado **U** del mentiroso no es autorreferencial de la misma manera que **U** es autorreferencial, y puede considerarse como verdadero aunque **U** se considera falso (§ 13. 4). Vimos en la §1 que esta estrategia es inútil.

A diferencia de la opción puramente convencional entre las definiciones en el estilo de Tarski que proporcionan los dos esquemas ($\mathbf{T}_{\ell}$) y ($\mathbf{T}^{\ell}$), la elección entre (**E+**) y (**E-**) es una elección sustancial entre dos teorías competidores de la significación. Por esta razón, y otras, el pronóstico actual para la teoría de verdad de Bradwardine, y su resolución de la paradoja del mentiroso, parece ser incierto.

Referencias

Bellhouse, D. R. "*De Vetula*: A Medieval Manuscript Containing Probability Calculations". *International Statistical Review / Revue Internationale de Statistique 68*, 2000. 123-136. Print.

Black, M. *Language and Philosophy*. Ithaca NY: Cornell University Press, 1949. Print.

Boyer, C. B. *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. Nueva Iorque: Hafner Publishing Company, Inc. Reimprimido 1959. Nueva Iorque: Dover Publications, Inc, 1949. Print.

Goldstein, L. "Epimenides and Curry". *Analysis 46*, 1986. 117-121. Print.

- - -. "Doubting Thomas: from Bradwardine back to Anon". *Rahman, Tulenheimo, & Genot*, 2008. 65-85. Print.

Grant, E. "Bradwardine and Galileo: Equality of Velocities in the Void". *Archive for History of Exact Sciences 2*, 1965. 344-364. Print.

Miller, D. W. Reseña de *Rahman, Tulenheimo, & Genot. Philosophy 85, 3,* 2008. 433-436. Print.

Mills, E. "Scheming and Lying". *Rahman, Tulenheimo, &* Genot, 2008. 113–128. Print.

Mou, B. "The Enumerative Character of Tarski's Definition of Truth and Its General Character in a Tarskian System". *Synthese 126*, 2001. 91–122. Print.

Panaccio, C. "Restrictionism: A Medieval Approach Revisited". *Rahman, Tulenheimo, & Genot*, 2008. 229–253. Print.

Quine, W. V. O. "Two Dogmas of Empiricism". *The Philosophical Review 60*, 1951. 20-43. Reprinted. *From A Logical Point of View*. W. V. O. Quine. Cambridge MA: Harvard University Press, 1953. 20-46. Print.

Rahman, S., Tulenheimo, T., and Genot, E. *Unity, Truth and the Liar: The Modern Relevance of Medieval Solutions to the Liar Paradox*. Heidelberg: Springer Verlag, 2008. Print.

Read, S. L. "The Truth Schema and the Liar". *Rahman, Tulenheimo, & Genot*, 2008a. 3-17. Print.

- - -. "Further Thoughts on Tarski's T-scheme and the Liar". *Rahman, Tulenheimo, & Genot*, 2008b. 205-225. Print.

- - -. *Thomas Bradwardine, "Insolubilia"*. Paris, Lovaina, Walpole MA: Peeters, 2010. Print.

Restall, G. "Models for Liars in Bradwardine's Theory of Truth". *Rahman, Tulenheimo, & Genot*, 2008. 135–147. Print.

Sandu, G. "Read on the Liar". *Approaching Truth. Essays in Honour of Ilkka Niiniluoto*. Eds. Pihlström, S., Raatikainen, P. and Sintonen, M. Londres: College Publications. 2007. 129–140. Print.

Spade, P. V. "*Insolubilia* and Bradwardine's Theory of Signification". *Medioevo: Revista di storia delle filosofia medievale 7*, 1981. 115–134. *Lies, Language and Logic in the Late Middle Ages*. Reprinted as chapter IV of P. V. Spade, 1988. Londres: Variorum Reprints.

Tarski, A. "Grundzüge des Systemenkalkül". *Fundamenta Mathematicae 25*, 1935–1936. 503–526, and *26. 2*. 283–301. Las referencias son a la traducción inglesa. "Foundations of the Calculus of Systems", capítulo XII, 1956. 342–383. Print.

________. "The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics". *Philosophy and Phenomenological Research 4*, 1944. 341-375. Print.

_________. *Logic, Semantics, Metamathematics*. Oxford: Clarendon Press, 1956. Print.

Wright, C. J. G. *Truth and Objectivity*. Cambridge MA: Harvard University Press, 1992. Print.