La idealización en la matemática*

Idealization in mathematics

Thomas Mormann
University of Basque Country, País Vasco. ylxmomot@ehu.es

Recibido el 30 de marzo de 2012 y aprobado el 17 de mayo de 2012

Resumen

El objetivo del presente artículo consiste en elucidar el papel de las idealizaciones en la evolución del conocimiento matemático, inspirado por algunas ideas de la filosofía de la ciencia y de la matemática neokantianas de Ernst Cassirer. Usualmente, en la filosofía de la ciencia contemporánea se da por hecho que el asunto de la idealización tiene que ver únicamente con las idealizaciones en las ciencias empíricas, en particular en la física.

Por contraste, Cassirer sostuvo que la idealización en las matemáticas, así como en las ciencias, tiene la misma base conceptual y epistemológica. Más precisamente, examino su "tesis de la identidad" investigando una variedad de ejemplos de idealizaciones tomadas del álgebra, la topología, la teoría de redes y la geometría física. Las idealizaciones en las matemáticas, así como en el conocimiento físico, se pueden caracterizar por la introducción de elementos ideales que conducen a compleciones. En ambas áreas, estos elementos ideales desempeñan esencialmente el mismo papel, es decir, sustituyen una variedad incompleta de objetos, mediante una variedad conceptual completa "idealizada".

Palabras clave

Algebras booleanas, Cassirer, compleciones, cortaduras de Dedekind, idealización, espacios de Stones.

Abstract

The aim of this paper is to elucidate the role of idealizations in the evolution of mathematical knowledge inspired by some ideas of Ernst Cassirer's Neokantian philosophy of science and mathematics. Usually, in contemporary philosophy of science it is taken for granted that the issue of idealization is concerned only with idealizations in the empirical sciences, in particular in physics.

In contrast, Cassirer contended that idealization in mathematics as well as in the sciences has the same conceptual and epistemological basis. More precisely, this "sameness thesis" is scrutinized by investigating a variety of examples of idealizations taken from algebra, topology, lattice theory, and physical geometry. Idealizations in mathematical as well as in physical knowledge can be characterized by the introduction of ideal elements leading to completions. In both areas these ideal elements play essentially the same role, namely, to replace an incomplete manifold of objects by a complete "idealized" conceptual manifold.

Key words

Boolean algebras, Cassirer, completions, Dedekind cuts, idealization, Stones spaces.

* Agradecimientos al Ministerio Español de Ciencia e Innovación por financiar la presente investigación, la cual hace parte del proyecto FFI 2009-12882

El problema de la idealización en la filosofía de la ciencia

El papel de la idealización en las ciencias empíricas y en particular, en la física es un tema muy discutido en filosofía de la ciencia Norton (2012), Nowakowa & Nowak (2000), Weisberg (2007). Sin embargo, esta misma noción ha recibido una menor atención en discusiones filosóficas relacionadas con las matemáticas. Hoy en día, al tratar el tema de la idealización en las ciencias se supone implícitamente que *en* las matemáticas no hay lugar para la idealización; éstas, ya se encuentran, en el lado de lo ideal. Así, el problema del carácter idealizador del conocimiento científico, solamente se plantea en relación con el papel de la idealización en el terreno empírico.

El filósofo Leszek Nowak y sus colaboradores en las últimas décadas, establecieron una detallada clasificación de los distintos métodos de idealización (2000). "Evidentemente", cabría decir que sólo les preocupa la idealización en las ciencias empíricas.

En este artículo, basándome en las ideas del filósofo neokantiano Ernst Cassirer, argumentaré, que también en las matemáticas, la idealización desempeña un papel clave y además la separación estricta de métodos de idealización en las ciencias empíricas y la matemática no es nada recomendable. Según Cassirer, la forma de tratar el problema de la idealización, adopta un punto de partida demasiado tardío. Para él, la idealización tiene un papel, tanto en la matemática, como en las ciencias empíricas, por lo que una teoría sobre el papel de la idealización en la ciencia, debe tener en cuenta, *tanto* a la primera, *como* a las segundas.

Si queremos entender el papel de la idealización, debemos estudiar cómo funciona en las matemáticas y en las demás ciencias. En segundo lugar, debo señalar que para Cassirer la filosofía de la ciencia no tiene como tarea darle fundamentación a las ciencias, en el sentido de proporcionarles el suelo firme del que no disponen por sí mismas. De lo que se trata, es de entender a la ciencia filosóficamente, explicar lo que en la práctica científica puede parecer a menudo confuso y poco claro. Por tal motivo, la tarea de la filosofía de la ciencia es la reconstrucción racional, más no la fundamentación metafísica.

Para la filosofía de la ciencia de Cassirer, el punto esencial de referencia es la física matemática: no la matemática como ciencia de objetos ideales, ni la física como ciencia puramente empírica. Esto nos puede bastar como prueba para demostrar que Cassirer, no pretendía una fútil reducción de la física a la matemática, ni una mera identificación entre ambas.

> Si se me permite expresar esa relación (entre ciencia y filosofía de la ciencia) de forma algo burda y paradójica, diría que la atención de la filosofía no debe dirigirse ni a la matemática ni a la física, sino específicamente a la relación[1] entre esos dos ámbitos. (Cassirer 48)

El problema de la idealización en la matemática

Es un lugar común afirmar que las matemáticas tratan con objetos "ideales" y no con objetos "reales". Tomemos por ejemplo, la geometría como teoría matemática: los puntos, las líneas y las áreas en geometría, *no* son reales, sino ideales. De forma más general, los objetos y las relaciones de la matemática, no son reales, sino objetos y relaciones ideales. No obstante, este no es el modo en el que quisiera utilizar los conceptos "ideal", "idealización" y nociones similares. Por ello, usaré el concepto de idealización en el sentido de idealización relativa, es decir, consideraré que las idealizaciones siempre son idealizaciones de algo y relativas a algo. Aunque esto puede parecer oscuro, por ello, trataré de clarificarlo.

Hubo un tiempo en el que la idealización era un tema candente en matemáticas: los *elementos ideales*, hicieron su aparición en la geometría; la teoría de los números; la teoría de retículos y en muchos otros campos de la matemática. Esto puede apreciarse, aún hoy en día, por el uso en la matemática contemporánea de expresiones como: "punto ideal"; "número ideal" o sencillamente; "ideales" de varios tipos como: "ideales primos", "ideales redondos" y muchos otros más.

La filosofía de la matemática en pocas ocasiones, ha prestado atención al tema de la idealización. Una excepción a esto es el caso del filósofo neo-kantiano alemán Ernst Cassirer. Según Cassirer, las idealizaciones son de vital importancia para la matemática y las ciencias empíricas.

Este artículo, presenta algunos aspectos esenciales de la propuesta de Cassirer sobre el papel que desempeña la idealización en las matemáticas y las ciencias empíricas. Estos aspectos desde mi posición, podrían resultar de interés para la filosofía de la ciencia, incluso, hoy en día.

[1] Subrayado por parte del autor.

La filosofía de la ciencia de Cassirer, trató a la matemática y a las ciencias, en particular a la física, como un "continuo". Esto no quiere decir, que considerase a las matemáticas, como si fuesen un tipo de ciencia *empírica*, tal y como eran entendidas por Mill y sus modernos seguidores naturalistas. Más bien, la perspectiva de Cassirer, estaba basada en las siguientes tesis "idealistas":

> (**TI**) *Idealización en la matemática y en las ciencias ("tesis de la identidad")*: la idealización en la matemática, así como en las ciencias empíricas matematizadas, puede ser caracterizada mediante la introducción de "elementos ideales". En ambas áreas, la introducción de elementos ideales, juega esencialmente, el mismo papel.
>
> (**IC**) *Idealización como completación*: la idealización en matemáticas, es completación, esto es, la completación de un dominio dado, mediante la introducción de algunos "elementos ideales".

La tesis de la identidad (**TI**), fue introducida por Cassirer en uno de sus primeros artículos titulado "Kant und die moderne Mathematik" ("Kant y la matemática moderna") de 1907 -hasta ahora, este artículo no está completamente traducido al inglés o al español-, este importante trabajo, puede ser considerado como el precursor programático de su primer gran libro: *Sustancia y función* de 1910, una de las obras más conocida de este autor.

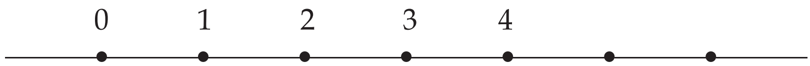
El objetivo general de este artículo, es mostrar que las completaciones idealizantes, son una realidad en la práctica matemática y no la invención de algunos filósofos. En pocas palabras, planteo que las completaciones, deben considerarse como herramientas esenciales en el arsenal de la "matemática de los matemáticos" y que merecen una mayor atención por parte de la filosofía de la matemática contemporánea.

De los números naturales N, a los números enteros Z: aspectos matemáticos y filosóficos

Comencemos con un ejemplo muy elemental, que sin embargo, jugó un papel importante, no sólo en la historia de las matemáticas, sino también, en la historia de la filosofía e incluso en la actualidad, puede ser considerado como un prototipo de una completación idealizadora.

Hoy en día, es difícil imaginar la dificultad conceptual que puede entrañar, pasar de los números naturales **N** {0, 1, 2, 3,...} a los números enteros **Z** {..., -2, -1, 0, +1, +2,...}. Pero este no siempre ha sido el caso. Si consultamos la historia de las matemáticas, algunos filósofos y matemáticos, percibieron dificultades filosóficas incluso con el *zero* y el *uno*, pero dejemos de lado esta cuestión y tomemos el conjunto de los números naturales **N**, como algo dado y no problemático, dotado con las operaciones estándares de la adición y la multiplicación.

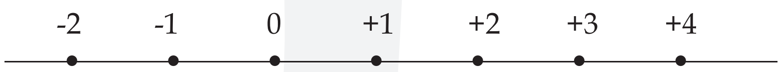
Un modelo geométrico útil de los números naturales **N**, representa estos números como puntos equidistantes sobre una línea recta:



Este modelo nos muestra cierta asimetría de **N**. Sólo los puntos, que están en el lado derecho de un punto *zero*, que antes hemos elegido de una manera arbitraria, sirven como representantes de los números naturales. Por tanto, es natural preguntarse: ¿qué se puede decir sobre los puntos que se encuentran a la izquierda de 0?

Dicho de una manera más formal, los números naturales se muestran estructuralmente incompletos en el sentido de que algunas ecuaciones lineales, tienen solución en **N**, mientras que otras *no*. Por ejemplo: 4x + 3y = 20, tiene solución en **N**, mientras que 4x + 3y = 2, no tiene una solución en **N**, aunque ambas ecuaciones parezcan esencialmente del mismo tipo. Como sabemos actualmente, los números enteros Z, ofrecen una solución altamente satisfactoria a dicha problemática.

Para remediar estas deficiencias ya mencionadas, parece oportuno completar los números naturales **N** con una estructura más simétrica, por ejemplo, es más completa la estructura de los números enteros **Z**, la cual puede ser representada geométricamente de la siguiente manera:



Remplazando el dominio **N** por el dominio **Z**, aparece una estructura, donde la ecuación 4x + 3y = 2 sí tiene una solución, además de muchas otras ecuaciones que pueden resolverse y que no tienen solución en el ámbito más pequeño de **N**. Como es bien sabido, esta completación de **N** a **Z**, no es un mero juego formal, sino que posee aplicaciones útiles, por ejemplo: se pueden interpretar estos números negativos como deudas y los positivos como capital o tal vez, como la magnitud de una fuerza, en relación con otra fuerza opuesta, además de muchas otras maneras, como ya lo hemos aprendido en la escuela.

Aunque la completación de **N** a **Z**, hoy en día es considerada como una pequeña pieza de la matemática elemental, hace un tiempo atrás, era vista como un tema central para la filosofía. De hecho, puede ser considerada, como un paso decisivo al separar el idealismo trascendental emergente de Kant, del racionalismo de la escuela de Leibniz y Wolff.

A diferencia del racionalismo de Leibniz, Kant sostuvo que el ámbito de nuestra experiencia no debe entenderse como una versión más o menos confusa, del ámbito de lo racional. Para Kant, las esferas de la razón y la experiencia, son esencialmente diferentes y esa diferencia, se expresa mediante la idea de magnitud negativa (cf. Beiser).

Kant argumentaba que la esfera de la experiencia, no se puede describir en términos estrictamente lógicos. Prueba de esto, es que una importante característica del ámbito de la experiencia es la "oposición real" de las cosas, la cual es esencialmente distinta de la "oposición lógica" reinante en el ámbito de la razón. La idea de "*oposición real*" de Kant, estaba basada en el concepto matemático de *magnitudes negativas*.

El texto pre-crítico, donde Kant formula estas ideas, data de 1763 y se titula: "Versuch den Begriff der negativen Größen in die Weltweisheit einzuführen" ("Intento de introducir el concepto de las magnitudes negativas en la filosofía de la ciencia"). En este artículo, Kant habla sobre la necesidad de la completación de los números naturales **N**, a los enteros **Z**. El elemento central en su argumentación es la distinción entre *oposición lógica* y *oposición real*. La *oposición lógica*, es una simple *contradicción*, esto es, la relación entre un *predicado A* y su *negación* no-*A*. Así, la oposición lógica nos lleva a algo *imposible*, nos lleva a *afirmar* y a *negar* al mismo tiempo, el predicado *A*. La *oposición real*, debe ser estrictamente distinguida de la oposición lógica. Como explicó Kant:

> Supongamos que hay +8 unidades de capital y -8 de la deuda pasiva, no hay contradicción involucrada en atribuirlas a la misma persona. Sin embargo, una de estas

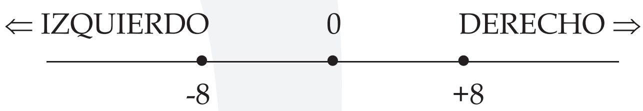
> magnitudes cancela una cantidad que es igual a la postulada por el otro, y la consecuencia es cero. (Kant 174)

Lo que Kant quería resaltar en contra de los seguidores de Leibniz, era que relaciones, tales como: la relación entre *capital* y *deuda*, es decir, relaciones que apelan a una oposición real, *no* son contradicciones, debido a que estas, pueden suceder en la realidad. Por tanto, hay que distinguirlas de las relaciones que conllevan una oposición lógica entre el predicado *A* y su negación no-*A,* las cuales, *no* pueden suceder en la realidad.

Kant sostuvo, que la *oposición real* (*Realrepugnanz*), era un aspecto esencial de la realidad fenoménica. Así, la incapacidad del racionalismo de Leibniz-Wolff para captar adecuadamente la idea de *oposición no-lógica* era una deficiencia fatal. En comparación, su idealismo trascendental, no sufría dicha deficiencia, porque permitía abordar, tanto la oposición lógica, como la oposición real.

No obstante, esta versatilidad tenía un costo. La lógica (en el sentido tradicional), carece del poder conceptual necesario para controlar la realidad en la cual la oposición real, juega un papel esencial.

Para tratar oposiciones reales, parece ser necesario acudir a otros recursos no-lógicos en concreto, cierta forma de geometría rudimentaria que incluye la distinción entre "izquierdo" y "derecho", tal y como se muestra en el modelo geométrico de los números naturales y enteros, con el que hemos comenzado este acápite:



Entonces, el "8 derecho" (+8) y el "8 izquierdo" (-8) se cancelan, i.e. (+8) + (-8) = (-8) + (+8) = 0. Kant en su filosofía madura, identificó estos ingredientes no-lógicos, como las formas de la sensibilidad pura, en concreto como el espacio y el tiempo (Beiser 41-2).

La completación geométrica de los números naturales **N**, mencionada hace unos momentos, seguramente era poco exacta. Por tanto, ahora volveremos una vez más, al concepto de completación, retomando el ejemplo de la completación de los números naturales a los enteros y elaborando sus rasgos matemáticos, con más detalle.

Sería un error entender el carácter elemental de esta completación de los números naturales a los números enteros, como una prueba de su trivialidad. Voy a argumentar, que incluso en la matemática contemporánea, la cuestión acerca de este tipo de completaciones, tiene cierto interés. De hecho, la completación de los números naturales a los enteros, es sólo el caso más elemental, de lo que hoy se suele llamar "*completación de Grothendieck*" de un semigrupo conmutativo (S, +)[2].

Un semigrupo conmutativo, es un dominio S, dotado con una adición +, que más o menos se comporta como la adición de números naturales. Cabe destacar que un elemento *a* de S, no tiene necesariamente un inverso –*a*. La completación de dicho semigrupo, se puede esbozar de la siguiente manera. Dado un semigrupo (S, +), el producto cartesiano S x S, se dota canónicamente, con una *estructura de semigrupo* definida por:

$$(a, b) + (a', b') := (a + a', b + b') \text{ con } (a, b), (a', b') \in S \times S$$

En un segundo paso, definimos en S x S, la siguiente relación de equivalencia

$$(a, b) \sim (a', b') := a + b' + s = b + a' + s \text{ para algún } s \ \ S$$

Denotemos [a, b] := {(a', b'); (a', b') ~ (a, b)}. Esta relación de equivalencia es compatible con la estructura del semigrupo de S x S, es decir, también S × S/~ es un semi-grupo:

$$[a, b] + [a', b'] = [a + b, a' + b']$$

La siguiente proposición, nos muestra que S × S/~ es la completación deseada del semigrupo (S, +):

Proposición: sea (S, +), un semigrupo conmutativo con un elemento neutral O. Con base en esto, existe una inclusión canónica S — c —> S × S/~ definida como c(a) := [a, 0], que preserva la estructura del semigrupo. La estructura del semigrupo, de S x S/~, no sólo es una

[2] En 1872, Dedekind, conoció esta completación en el caso de los números naturales **N**, Sieg & Schlimm (2005 136).

estructura de semigrupo, sino una estructura de grupo, esto es, cada elemento [a, b], tiene su inverso [b, a], tal que:

$$[a, b] + [b, a] =: [a + b, a + b] = [0, 0] \blacklozenge$$

Como cabe esperar, la completación de **N** a **Z**, esbozada informalmente, al principio de este texto es isomórfica a la completación de Grothendieck, de **N** × **N/~**.

Además, la completación de Grothendieck, puede mostrarse como la "*mejor*" completación posible en el sentido de la teoría de las categorías, porque está basada en una construcción universal.

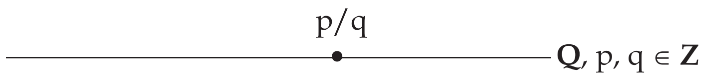
Resumiendo, la completación de **N** a **Z**, sólo es un ejemplo elemental de un proceso de completación conceptual más general, que es importante en muchos ámbitos de las matemáticas contemporáneas. Por ejemplo, la completación de Grothendieck, desempeña un papel crucial para la construcción de la "K-teoría" que resultó ser una herramienta significativa en la topología algebraica moderna y en el análisis funcional. En el caso de la K-teoría topológica, el semigrupo que se quiere completar es el semigrupo V(X) de los haces vectoriales sobre un espacio topológico X. Por ende, se puede mostrar que la completación K(X) de V(X), figura como una componente de la teoría cohomológica periódica K*(X).

Las cortaduras de Dedekind

La completación de Grothendieck de los números naturales es un procedimiento de completación más bien elemental. Quizás por este carácter elemental, los filósofos le han prestado poca o ninguna atención. A pesar de este desinterés, las *cortaduras de Dedekind* son, probablemente, el ejemplo más conocido de una completación.

La completación, utilizando las cortaduras de Dedekind, es particularmente sugerente, porque en ella se entrelazan aspectos geométricos y algebraicos de una manera fascinante.

Tomemos como punto de partida, los números racionales **Q**. De nuevo, la línea euclidiana, proporciona un modelo geométrico de **Q**: basándose en el modelo geométrico de los números enteros, mencionados anteriormente, es intuitivamente claro, cómo pueden representarse todos los números racionales, como puntos de la línea euclidiana:



Naturalmente, no acertamos que todos los puntos de la línea euclidiana, corresponden a números racionales. Aunque los números racionales, son suficientes para realizar cálculos prácticos, no lo son, para aplicaciones de tipo más teórico. Por ejemplo, no son demasiado útiles para resolver ecuaciones polinomiales. En muchas ocasiones, se necesitan "más números".

En otras palabras, el dominio de los números racionales, no ofrece un escenario lo suficientemente amplio como para resolver ecuaciones polinomiales. El ejemplo más clásico que muestra este defecto es la ecuación $x^2 = 2$. Para vencer esta deficiencia, debemos construir nuevos números "ideales", que ofrezcan soluciones para ecuaciones, que no tienen soluciones en Q.

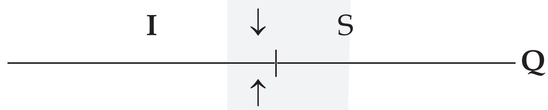
Esto puede remediarse, gracias a la completación idealizadora de los números racionales **Q**, a través de las cortaduras de Dedekind, que nos llevan a los números reales **R**.

Por tal motivo, para construir los números que faltan, Dedekind tomó el conjunto de las "cortaduras" de los racionales. Una cortadura se basa en una idea muy intuitiva.

Una cortadura de Dedekind es una partición (L, S) de **Q**, que cumple las siguientes condiciones:

$$I \cup S = \mathbf{Q}\,,\ I \cap S = \varnothing \ \&\ (x)\,(y)\,(x \in I \ \&\ y \in S \Rightarrow x < y)$$

Llamaremos a I *cortadura inferior* y a S *cortadura superior*. Obviamente, I y S se determinan la una a la otra:



Si denominamos el conjunto de las cortaduras inferiores de **Q**, como I (Q) se define una inclusión canónica de **Q**, en I (Q)

$$\mathbf{Q} \xrightarrow{\quad e \quad} I(\mathbf{Q}),\ e(r) := \{x;\ x < r\}.$$

Trasladando el número racional r, a la cortadura inferior e(r) := {x; x < r}. De esta forma, los números racionales r, pueden identificarse con las cortaduras inferiores, que a su vez, definen cortaduras superiores {a; a ≥ r}, con elementos mínimos r.

El punto crucial es que hay muchas *otras cortaduras inferiores*, cuyas cortaduras superiores, NO tienen elementos mínimos. Por ejemplo, $\{x; x^2 < 2\}$, la cual corresponde a la raíz cuadrada de 2.

Con base en esto, se muestra que la adición y multiplicación de los números racionales **Q** pueden extenderse a I(**Q**), esto es, I(**Q**), se identifica con los números reales **R**. A través, de la inclusión de **Q** en I (**Q**), el dominio **Q**, de los números racionales, ha sido completado por ciertos "elementos ideales", de tal manera que I(**Q**), es más cómodo desde el punto de vista de la aritmética, esto se muestra, por el hecho que ecuaciones como $x^2 = 2$ se pueden resolver en **R**, pero no en **Q**.

No obstante, tampoco **R** es del todo satisfactorio, porque no todos los polinomios tienen solución o no tienen todas las soluciones que deberían tener, por ejemplo, la ecuación $x^2 + 2 = 0$, no tiene solución en **R**, mientras que $x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$, sólo tiene una solución (y debería tener tres). Para conseguir una teoría de las ecuaciones polinomiales, completamente satisfactoria en la cual el teorema fundamental del álgebra sea válido, hay que sustituir el cuerpo incompleto **R** y reemplazarlo por el cuerpo algebraicamente completo **C** de los números complejos.

Podemos considerar los números complejos como parejas ordenadas (a, b), de números reales a, b, tal que, un número real a se identifica con la pareja (a, 0). De nuevo, este proceso, puede concebirse como un proceso de completación idealizante, sin embargo, de un tipo diferente al de la completación de Grothendieck o al de la completación basada en las cortaduras de Dedekind.

Un modelo geométrico bien conocido de los números complejos **C** := {a + ib; a, b ∈ **R**}, es el plano cartesiano, dotado con un sistema de coordenadas apropiadas, como el propuesto por Gauss: un punto (a, b) (a, b ∈ **R**) del plano, corresponde de una manera 1-1, al número complejo a + ib ∈ **C**.

Los cuerpos **R** y **C**, no son las únicas completaciones de **Q**, quizás no son ni siquiera, las más interesantes matemáticamente. Hay completaciones intermedias, por decirlo así, que desempeñan un papel central en la teoría algebraica de los números y campos relacionados. Históricamente, el matemático alemán Kummer, parece haber sido el primero en considerar explícitamente, las completaciones de los números enteros ordinarios, mediante la introducción de ciertos números ideales.

En concreto, Kummer definió números primos ideales para cuerpos algebraicos **Q**[x], siendo x, una raíz primitiva de una ecuación ciclotómica. Por ejemplo, si tomamos la ecuación ciclotómica $x^3 = 1$, con la raíz primitiva $x = (-1 + \sqrt{3}i)/2$, se obtiene el cuerpo algebraico **Q**[x], $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Q}[x] \subseteq \mathbf{C}$, cuyos "números enteros ideales" tienen la forma $(a + b(-1 + \sqrt{3}i)/2)$, $a, b \in \mathbf{Z}$.

Estos números enteros ideales, no deberían ser considerados como generalizaciones, más o menos bien motivadas, de los números enteros ordinarios, sino como elementos ideales que contribuyen a revelar la esencia de estos últimos:

> [T]he new elements are not simply adjoined to the old ones as elements of a different kind and origin, but the new area systematically unfolding of the old. And this requires... primary logical kinship between the two. Then the new elements will bring nothing to the old, other than what was implicit in their original meaning. If this is so, we may expect that the new elements, instead of fundamentally changing the meaning and replacing it by another, will first bring it to its full development and clarification. And when we survey the history of the ideal elements in mathematics, this expectation is never disappointed.
>
> […] [W]e have to use the new elements as an intellectual medium by which to apprehend the true meaning of the old, by which to know it with universality and depth never before achieved. (Cassirer 392)

Los matemáticos del siglo XIX, entendieron estos elementos ideales de una manera muy similar a Cassirer. Por ejemplo, en 1859, el matemático irlandés H. J. S. Smith, defendió en su *Report on the theory of numbers*, en la Royal Society:

> Los números complejos de Gauss, Jacobi y Kummer se imponen a nuestra consideración, no porque sus propiedades sean generalizaciones de las propiedades de los números ordinarios, sino porque los números enteros sólo pueden explicarse en una referencia a ellos. (Smith 1860)

Dicho de otra manera, la interpretación de Cassirer del papel de las idealizaciones, sigue la interpretación que ya había sido ofrecida por diversos matemáticos. Esta interpretación, implica que los objetos de las teorías matemáticas, no se conciben como algo dado o ya "fijado *a priori*". Al contrario, estos objetos, pueden ser sujetos a construcciones idealizantes. Estas construcciones, imposibilitan una concepción de la matemática como una ciencia de lo intuitivamente dado, es decir, como una ciencia de un dominio platónico invariable.

Completación de álgebras booleanas

Uno de los propósitos fundamentales del presente artículo, es el de convencerles de que el concepto de "completación idealizante", juega un papel central en la matemática "real", es decir, las matemáticas de los matemáticos y que no es una mera invención de los filósofos. Empecemos con un teorema, este es considerado por los matemáticos como uno de los teoremas más importantes del siglo pasado[3], el famoso "teorema de representación de Stone", Davey & Priestley (1990), Grosholz (1985), Johnstone (1982).

Este teorema, estableció el primer vínculo no-trivial, entre la topología y la lógica. Fue demostrado por el matemático americano Marshall Stone, a mediados de los años 30. El teorema de Stone, demuestra que cada álgebra booleana B, tiene una *representación topológica*, por medio del álgebra booleana *completo* B*. Podemos encontrar ejemplos familiares de álgebras booleanas en los conjuntos potencia PX de X o bien, en las álgebras de Lindenbaum de la lógica proposicional[4].

De hecho, el teorema de representación de Stone, es una generalización de la completación de Dedekind, de los números racionales **Q**, a los reales **R**. Más precisamente, el álgebra B, corresponde a los números racionales **Q** y su completación B*, corresponde a los números reales **R**.

---

[3] Véase el libro clásico *Stone spaces*, de Johnstone (1982).

[4] Una demostración elemental, pero completa, del teorema de Stone, se encuentra en el libro de Davey & Priestley (1990).

De una manera más detallada, B* se define como el álgebra completa de los *subconjuntos abiertos de tipo regular* de un espacio topológico, llamado espacio Stone (B). Los puntos del espacio topológico Stone (B) son los ideales primos del álgebra booleana B con la que hemos empezado.

La completación de Stone de álgebras booleanas, por medio de ideales en el sentido de la teoría de los retículos, abrió el camino para establecer muchos vínculos entre el álgebra y la topología (Grosholz). Además, la completación de Stone se convirtió en el prototipo de completaciones en muchas otras áreas de la matemática (Johnstone).

Una aplicación interesante del teorema de Stone, está en la base de la aplicación de la matemática, a las ciencias empíricas como la física. Esto tiene que ver, con los puntos como construcciones ideales de la geometría física. Este método fue esbozado por Whitehead (1929), en su libro *Process and reality*, pero un tratamiento matemáticamente más preciso, requiere a su vez del teorema de Stone.

Esencialmente, el problema subyacente puede describirse de la siguiente manera: aunque en física, geometría y otras ciencias se habla frecuentemente de los puntos como elementos atómicos básicos, en la "realidad", nunca encontramos puntos. Consideremos la realidad física. Habitualmente, el físico no siente escrúpulos al hablar de puntos espaciales o acontecimientos instantáneos, interpretados como puntos temporales, entre otros, no obstante, también admitirá, sin problemas, que nunca experimenta de hecho, estas entidades llamadas puntos. Por ejemplo, los valores medidos de una magnitud física, nunca se suponen exactos, simplemente porque esto equivaldría a suponer una precisión absoluta que no se da en la ciencia real. Por ende, se acostumbra a decir, que los valores medidos se localizan en cierto intervalo, pero habitualmente, dicho intervalo se entiende como un conjunto de puntos.

Así, aunque se admita que nuestros métodos de medición nunca alcanzan la exactitud de los puntos, estamos acostumbrados a considerar a éstos como las entidades básicas del espacio, el tiempo y el espacio-tiempo, por más que desde un punto de vista estrictamente empírico, parezcan ser entidades bastante dudosas.

Whitehead, fue uno de los primeros en intentar sustituir los puntos como entidades fundamentales por otras entidades empíricamente más accesibles. En el caso del espacio y el espacio-tiempo, estas entidades, pueden denominarse *regiones*. Intuitivamente, una región espacial, se puede entender, como una parte del espacio, con límites más o menos precisos.

El programa de Whitehead consistía en considerar las regiones, en lugar de los puntos como entidades básicas fundamentales y construir los puntos y sus relaciones geométricas a partir de las regiones y sus relaciones. Whitehead sólo presentó un esbozo informal de cómo podía funcionar esto, pero se puede demostrar que su planteamiento es susceptible de una formalización rigurosa.

Lo más interesante es que dicha construcción de los puntos, a partir de las regiones, puede entenderse como una generalización del método de las "cortaduras" de Dedekind; es decir, que la introducción de los puntos como elementos ideales o límite en el ámbito de las regiones es un proceso idealizante de compleción, análogo a la construcción de los números reales a partir de los racionales. Con mayor precisión, esta compleción, se entiende como una generalización del método de construcción que utilizó Stone en su demostración del teorema de representación, que lleva su mismo nombre.

Así mismo, la afirmación que los métodos de compleción al estilo de Dedekind, forman parte de las síntesis fundamentales más importantes sobre las que se basan las matemáticas y las ciencias empíricas, queda más justificada, cuanto más nos introducimos en los vericuetos de la matemática y la ciencia moderna.

Resumiendo, podemos decir que el método de los elementos ideales es un procedimiento poderoso, presente en muchas disciplinas matemáticas de la geometría física y otras ciencias. Los elementos ideales que introduce, no son exactamente otro tipo de cosas, que añadimos a las "reales", sino que, más bien, expresan cierta forma de tratar las cosas "reales". Por ejemplo, una cortadura de Dedekind, es el límite de una acción ideal, la de repartir el conjunto de los números racionales en dos mitades; esta acción ideal, no se supone que sea posible en la realidad, debido a que es una especie de supertarea, que equivaldría, a la determinación de los números infinitos con precisión absoluta.

Las acciones empíricamente posibles, sólo apuntan en la dirección de la cortadura ideal, como dijo Cassirer. Esto es exactamente, lo que Cassirer pretendía subrayar, cuando afirmaba que, las leyes exactas, matemáticamente formuladas, no se cumplen en el terreno de nuestras experiencias sensibles, sino tan solo, para objetos límites ideales:

> Si se pretende que tenga éxito la fundamentación de la teoría exacta de la cinemática, el cuerpo rígido de la geometría pura tiene que sustituir a los cuerpos perceptibles y su variabilidad infinita.
>
> [...] Razonablemente, las leyes sólo se pueden formular para objetos límites ideales que sustituyen conceptualmente a los objetos de la percepción empírica. "Estar en movimiento" es un predicado que nunca se puede aplicar a las "cosas" del mundo sensible que nos rodea. Sólo se cumple para ese otro tipo de objetos que el matemático pone en su lugar en una construcción libre. El movimiento no es una cuestión de sensación sino de pensamiento, no de percepción sino de concepción. (Cassirer 118)

El papel de las idealizaciones es esencialmente, el mismo en todos los terrenos. Son necesarias para asegurar la existencia de fenómenos estables, llámense leyes en la física o teoremas en la matemática. El papel de los conceptos límite, es el mismo para la constitución de campos de números, que para dominios geométricos o empíricos. Así mismo, uno de los principales objetivos de la ciencia es la construcción de "situaciones estables" que muestran cierto tipo de comportamiento invariante, "sujeto a leyes" en un océano de contingencias.

En los apartados anteriores, he caracterizado los medios para construir tales situaciones estables, con varios métodos, al introducir los elementos límites idóneos. Estos métodos, se inspiran en la matemática, pero métodos similares, se emplean también en las ciencias empíricas: un caso destacable, sería la construcción de los puntos en la geometría física.

La completación de Yoneda

El segundo ejemplo de una completación importante en la matemática contemporánea es el "lema de Yoneda". Este lema, trata con completaciones de categorías. De manera muy breve, la noción de categoría, se describe como un universo local para el discurso matemático. Por ejemplo, la categoría de grupo GRP o categoría de espacios topológicos TOP, definen el marco de objetos y relaciones, que tratan con los grupos y los espacios topológicos respectivamente.

Las categorías tienen ciertos rasgos estructurales que las hacen más o menos apropiadas para llevar a cabo ciertas "construcciones universales". A veces, la categoría en la cual estamos trabajando, no nos permite llevar a cabo algunas de estas construcciones universales. Esta dificultad es similar al problema que se ha discutido al inicio, es decir, el problema de solucionar ciertas ecuaciones en ciertos sistemas de números.

Por tanto, en muchas ocasiones es útil reemplazar la categoría original, por una completación más apropiada. El lema de Yoneda, nos ofrece un método versátil de completación. Éste, ha resultado de gran utilidad en muchas áreas distintas de la matemática. Grosso modo, una categoría A "localmente pequeña", se incluye por el functor de Yoneda Y, en una categoría functor

$$Y : A \xrightarrow{\quad f \quad} SET^{A^{opp}}$$

Aquí, SET es la categoría de los conjuntos y A^{opp} es la categoría "opuesta" de A. Esta última categoría, puede considerarse como una especie de imagen espejo de A. La relación entre A y A^{opp} es análoga a la relación entre "+1" y "-1". Cada morfismo $a \xrightarrow{\quad f \quad} b$, de la categoría A, corresponde biunívocamente, a un morfismo $b \xrightarrow{\quad f^{opp} \quad} a$. En particular $^{A^{opp\,opp}}$ = A, analógicamente como $(-1)^2 = +1$. A pesar de su carácter elemental, la inclusión de Yoneda es una construcción con una amplia gama de aplicaciones. En un libro de texto contemporáneo de la teoría de las categorías, encontramos la siguiente observación:

> El lema de Yoneda es quizás el resultado más utilizado en la teoría de categorías…
>
> […] La categoría *SET*$^{A^{opp}}$ es como una extensión de A por "elementos ideales" que permite cálculos que no se puede hacer en A. Esto es algo así como pasar a los números complejos para resolver las ecuaciones de los reales, o la adición de un tipo más elevado de una teoría lógica elemental. (Awodey 194)

La tesis de Awodey, que se encuentra en una u otra forma, en muchos libros de texto, me parece particularmente relevante para confirmar nuestro enfoque de la idealización como completación, porque en este libro, su autor no tiene ningún interés en asuntos filosóficos. Como dije antes, es un libro de texto sobre teoría de *las categorías* para los matemáticos.

Para dar un ejemplo concreto de una aplicación del lema de Yoneda quisiera mencionar "el análisis infinitesimal suave (Smooth Infinitesimal Analysis)". Básicamente este "análisis suave" es algo así como la resurrección bastante sorprendente, de los infinitesimales de la matemática pre-moderna.

En la mayoría de las versiones pre-modernas del "cálculo infinitesimal", infinitesimales dx, dy, esto es, magnitudes infinitamente pequeñas, juegan un rol esencial.

En las últimas décadas del siglo XIX, los infinitesimales, fueron expulsados del discurso oficial de la matemática, gracias a los trabajos de matemáticos como: Cantor, Dedekind y Weierstraß.

Filósofos como Carnap y Russell consideraron los infinitesimales como "seudo-conceptos" metafísicos que deberían ser eliminados del discurso matemático. Sorprendentemente, en los años 70 del siglo pasado, se demostró, que números reales **R**, podían completarse de tal manera que el sistema resultante, contenía infinitesimales. En este proceso de completación, el lema de Yoneda juega un papel crucial. Nos permite completar los números reales de toda la vida, con infinitesimales no-arquimedianos. Así, la estructura resultante, sirve como base de un análisis infinitesimal suave (Smooth Infinitesimal Analysis).

Consideraciones finales

Como he dicho anteriormente, mi propósito era convencerles de que las completaciones juegan un papel importante en la evolución conceptual de las matemáticas y que no son una quimera inventada por filósofos. Además, estas completaciones no están reducidas a partes demasiado elementales de la matemática.

Así mismo, cualquier filosofía de las matemáticas, con algún interés en las matemáticas reales y que no se contente con modelos filosóficos de la matemática más o menos anémicos, debería reconocer la importancia de esta herramienta conceptual. Si las completaciones son importantes para la matemática, sería natural preguntarse, si juegan un papel similar en las ciencias empíricas. Después de todo, las idealizaciones en las ciencias empíricas, están basadas en muchas ocasiones en consideraciones matemáticas.

Cassirer contestó esta cuestión con la "tesis de identidad" (**TI**), con un claro y rotundo SÍ:

> (TI) la idealización en la matemática y las ciencias empíricas matematizadas, puede ser caracterizada mediante la introducción de "elementos ideales". En ambas áreas, la introducción de estos elementos ideales, juega esencialmente, el mismo papel.

Cassirer que entendió la "ciencia" en el sentido amplio del concepto alemán "Wissenschaft" enfatizó que, *tanto* en matemáticas, *como* en física, se utiliza el método de los elementos ideales. Esta afirmación, contrasta fuertemente con las opiniones actuales, según las cuales, la matemática está por decirlo así, *dentro* de la esfera de los objetos ideales, mientras que la física, queda fuera de ese mundo ideal.

En contraste con la mayoría de los estudios actuales, para Cassirer no existía una separación tajante entre las matemáticas y las ciencias empíricas. Lo que afirma Cassirer es que la idealización, esto es, la introducción de elementos ideales, es tan común a la matemática, como a la física.

Así, la matemática, no debería caracterizarse únicamente como un ámbito de objetos ideales y tampoco la física debe limitarse a la esfera empírica. En principio, la matemática como ciencia, no es tan diferente de la física.

Cassirer sostuvo la tesis (ST), durante toda su carrera filosófica. Quizá, la versión más elaborada, la encontramos en su obra maestra *La filosofía de las formas simbólicas* (1955). Aquí, Cassirer propuso (ST), como una formulación alternativa de su "principio fundamental de la unidad de la ciencia":

> La lógica, las matemáticas y la física no deben ser concebidas como diferentes dominios ontológicos que existían por

> separado. Más bien, debemos comparar la matemática, la lógica y las formas físicas de conocimiento en su evolución histórica en curso. Esta comparación nos llevaría a la conclusión de que ninguna de estas formas puede constituir un ser objetivo y el ámbito de la validez objetiva teórica para sí misma, sino que todos ellos se construyen juntos en sus interconexiones mutuas. (*PSF* III 384 ff.)

No todo el mundo compraría esta afirmación. Pero al menos, podríamos considerarla como un argumento a favor de una tesis más débil, pero más plausible, es decir, la tesis de la similitud:

> (TS) una teoría filosófica comprensiva de la idealización, tiene que tomar en cuenta las idealizaciones, tanto en matemáticas, como en las ciencias. En ambas esferas, la introducción de elementos ideales, juega un rol similar.

Finalmente, sostengo que esta tesis de *la similitud*, entre idealización en ciencias y en matemáticas, puede ser la máxima de un programa de investigación prometedor.

Referencias bibliográficas

Avidad, Jeremy. "Methodology and metaphysics in the development of Dedekind's theory of ideals". *The architecture of mathematics*. Eds. Jose Manuel Ferreirós and Jeremy Gray. Oxford: Oxford University Press, 2006. Print.

Awodey, Steve. *Category theory*. Oxford: Oxford University Press, 2006. Print.

Beiser, Frederick C. "Kant's intellectual development: 1746-1781". *The Cambridge companion to Kant.* Ed. Paul Guyer. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. Print.

Cassirer, Ernst. "Kant und die moderne mathematik". *Kantstudien*. 1907: 1-49. Print.

---. "Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit". *Die nachkantischen Systeme*. 1920. Print.

---. *The philosophy of symbolic forms.* New Haven: Yale University Press, 1955. Print.

---. *Substance and function & Einstein's theory of relativity*. New York: Dover, 1953. Print.

Corry, Leo. *Modern algebra and the rise of mathematical structures. Vol. 17 of Science Networks*. Basel: Birkhäuser Verlag, 1996. Print.

Corfield, David. *Towards a philosophy of real mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. Print.

Davey, Bryan. and Hilary A. Priestley. *Introduction to lattices and order*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. Print.

Grosholz, Emily. "Two episodes in the unification of logic and topology". *British Journal of Philosophy of Science*. 1985: 147-157. Print.

Johnstone, Peter. *Stone space*. Cambridge: Cambridge University Press, 1982. Print.

Mac Lane, Saunders. *Mathematics. Form and Function*. New York and Berlin: Springer, 1986. Print.

Mormann, Thomas. "Idealization in Cassirer's Philosophy of Mathematics". *Philosophia Mathematica*. 2008: 151-181. Print.

Norton, John D. "Approximation and idealization: Why the difference Matters". *Philosophy of Science*. Forthcoming.

Nowakowa, Izabella. and Leszek Nowak. "The richness of idealization". *Poznan studies in the philosophy of the sciences and the Humanities*. 2000. Print.

Sieg, Wilfred and Dirk. Schlimm. "Dedekind's analysis of number: Systems and axioms". *Synthese*. 2005: 121-170. Print.

Weisberg, Michael. "Three kinds of idealization". *The Journal of Philosophy*. 2007: 639-659. Print.

Whitehead, Alfred North. *Process and reality: An essay in cosmology*. New York: MacMillan, 1929. Print.